Anallagmatische Punktkoordinaten im Kugelgebüsch und ihre Anwendung auf die Nichteuklidische Geometrie.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Kaiser Wilhelms-Universität Straßburg

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Adolf Magener.

Straßburg.

Straßburger Druckerei u. Verlagsanstalt, vorm. R. Schultz u. Co.

1906.

Lebenslauf.

Verfasser dieser Abhandlung, Friedrich Wilhelm Adolf Magener, ist der Sohn des Rechnungsrats Alexander Magener in Mülhausen im Elsaß. Er wurde am 13. Oktober 1884 zu Hochfelden im Kreise Straßburg geboren. Von Herbst 1890 an besuchte er die Realschule in Markirch und hierauf von Ostern 1898 an das Gymnasium in Altkirch. Nach dem dortselbst Juni 1902 bestandenen Abiturientenexamen bezog er die Universität Straßburg. Hier widmete er sich, nach kurzem Verweilen in der philosophischen Fakultät, von Neujahr 1903 an dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Studium. In Berlin setzte er von Herbst 1903 bis Ostern 1905 seine Studien fort und kehrte dann wieder an die Kaiser Wilhelms-Universität zurück, deren Angehöriger er zur Zeit noch ist.

Seinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Wohl allen Geometern, die sich angehend mit der Geometrie des Kugelgebüsches beschäftigt haben, ist der Zusammenhang der Kugelgeometrie mit der Nichteuklidischen Geometrie aufgefallen. Zuerst wohl von Klein, dann von Liebmann („Nichteuklidische Geometrie"), Wellstein (Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 2) u. a. wurde daher die Kugelgeometrie dazu benützt, um die Nichteuklidische Geometrie mit den Mitteln der Euklidischen zu realisieren. Am ausführlichsten in dieser Hinsicht ist wohl Herr Professor Dr. Wellstein in seiner Enzyklopädie, indem er auch besonders nachdrücklich darauf hinweist, daß als Analogon des Punktes der Nichteuklidischen Geometrie im Gebüsch das Punktepaar auftritt.

Wenn man nämlich diese Tatsache nicht beachtet, gelangt man leicht zu der Auffassung, die u. a. von Davis ausgesprochen ist, („Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie, Dissertation Greifswald 1904"), daß es sich im Kugelgebüsch um einen neuen, den „sphärischen" Typus der Nichteuklidischen Geometrie handle, der besonders in den Zusammenhangsverhältnissen der Ebene von der gewöhnlichen Nichteuklidischen Geometrie abweicht. In Wahrheit erhält man ganz genau die hyperbolische oder elliptische Nichteuklidische Geometrie, je nachdem man in einem Kugelgebüsch mit reeller oder imaginärer Orthogonalkugel die Punktepaare als Pseudopunkte, d. h. als Bilder von Punkten, die Kreise als Bilder

von Geraden, die Kugeln des Gebüsches als Bilder von Ebenen betrachtet. Ist dies richtig, so muß diese Abbildung sich auch analytisch so durchführen lassen, daß den Koordinaten eines Punktes des Nichteuklidischen Raumes in eindeutiger und eindeutig umkehrbarer Weise die Koordinaten eines Punktepaares des Gebüsches entsprechen. Ganz von selbst stellt sich dabei der Wunsch ein, den beiden Punkten eines Punktepaares dieselben homogenen Koordinaten zu geben, so daß also in homogenen Koordinaten die Beziehung vollkommen eindeutig ist und die zwei Punkte eines Paares sich nur durch nicht homogene Bestimmungen unterscheiden lassen.

Dieser Wunsch wird im folgenden realisiert durch ein eigentümliches System sogen. „anallagmatischer Koordinaten im Gebüsch", die auch zu andern geometrischen Untersuchungen in hohem Grade geeignet sind. Die Bezeichnung ist von Darboux entlehnt, und in der Tat steht auch die ganze Betrachtung in einem gewissen Zusammenhang mit Darboux*) hinsichtlich des Zieles. Die geometrische Methode und die Begründung des Koordinatensystems ist eine ganz andere. Die analytische Herleitung desselben ist entstanden durch die Erweiterung eines Seminarvortrages von Herrn Professor Dr. Wellstein, der sich auf den speziellen Fall des parabolischen Gebüsches bezog.

Es sei mir noch gestattet, meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Wellstein, der mich auf das Thema aufmerksam gemacht und mir auch beim Ausbau desselben mannigfache Unterstützung angedeihen ließ, hierfür meinen wärmsten Dank auszusprechen.

---

*) Darboux; Sur une classe remarquable de Courbes et de surfaces algébriques.

§ 1.

Definition und Darstellung der tetrasphärischen anallagmatischen Punktkoordinaten.

1. Die Kugelgleichung hat die Form:

(1) $$K = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - r^2 = 0$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - r^2) - 2x\xi - 2y\eta - 2z\zeta = 0$$

oder noch etwas allgemeiner:

(2) $$K = ax + by + cz + ds + e = 0,$$
wo $s = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

Die rechte Seite einer Kugelgleichung stellt aber, vorausgesetzt, daß $s = (x^2 + y^2 + z^2)$ den Koeffizienten 1 hat, die Potenz dieser Kugel im Punkte (x, y, z) dar. Also folgt:

(3) $$\frac{K}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + s + \frac{e}{d}$$

als Potenz der Kugel K im Punkte (x, y, z). Speziell für den Koordinatenanfangspunkt $x = y = z = 0$ folgt also als Potenz:

(4) $$\frac{K}{d} = \frac{e}{d}.$$

Nehmen wir nun den Koordinatenanfang als Potenzzentrum an eines Kugelgebüsches Ω mit der Inversionspotenz $\pm r^2 = p$, das wir unserer weiteren Betrachtung zugrunde legen wollen, so muß nach (4)

(5) $$\frac{K}{d} = \frac{e}{d} = p \quad \text{d. h.}$$
$$e = pd$$

sein. Dieser Wert von e in (2) eingesetzt, ergibt offenbar

alle Kugeln K_i, die zu dem Gebüsch Ω gehören. Ihre Gleichungen sind also sämtlich von der Form:

(6) $$K_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i (s + p) = 0.$$

2. *Ein Kugelgebüsch ist nun durch je vier Kugeln bestimmt, die nicht einem Bündel angehören.* Denn sind $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$, $x_4 = 0$ die Gleichungen von vier Kugeln des Gebüsches, die nicht einem Bündel angehören, so läßt sich, wie wir alsbald sehen werden, jede Kugel des Gebüsches in der Form darstellen: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$. Unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors ω, der sich später als zweckmäßig erweisen wird, können wir die linken Seiten von je vier das Gebüsch bestimmenden Kugeln in der Form annehmen:

(7) $$\omega x_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i (s + p), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

worin die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

die wir mittels des Aronholdschen Symbols auch kurz

$$\triangle = (abcd)$$

schreiben, *von null verschieden sein muß*, weil wir andernfalls vier nicht sämtlich verschwindende Konstanten p_1, p_2, p_3, p_4 so bestimmen könnten, daß

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0$$

ist, d. h. die vier Kugeln x_1, x_2, x_3, x_4 würden einem Bündel angehören, was unserer Voraussetzung widerspricht.

In (7) bedeutet nun p die gemeinsame Potenz der vier Kugeln $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ im Punkte 0, dem Koordinatenanfang. *Für einen beliebigen Punkt (x, y, z) stellt daher nach* (4)

$$\frac{\omega x_i}{d_i}$$

die Potenz der Kugel $x_i = 0$ dar.

3. Die Auflösung der Gleichungen (7) nach x, y, z ergibt:

$$(8) \quad \begin{cases} \omega\,(bcdx) = -\triangle\, x \\ \omega\,(cadx) = -\triangle\, y \\ \omega\,(abdx) = -\triangle\, z \\ \omega\,(abcx) = \triangle\,(s+p), \end{cases}$$

woraus man nochmals sieht, daß, wenn $\triangle = 0$ wäre, u. a. die Gleichung $(b\,c\,d\,x) = 0$ bestehen würde, d. h. es wäre

$$(bcd)_1\, x_1 + (bcd)_2\, x_2 + (bcd)_3\, x_3 + (bcd)_4\, x_4 = 0,$$

worin $(bcd)_i$ *die zu* a_i *gehörige Minore* von $\triangle = (abcd)$ *ist.*

Die Gleichung einer beliebigen Kugel des Gebüsches ist nach (6) in den Koordinaten x, y, z von der Form:

$$ax + by + cz + d\,(s+p) = 0,$$

also ist nach (8):

$$a\,(bcdx) + b\,(cadx) + c\,(abdx) - d\,(abcx) = 0$$

die Gleichung dieser Kugel ausgedrückt durch x_1, x_2, x_3, x_4; sie ist von der Form:

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0, \quad \text{d. h.}$$

die Gleichungen aller Kugeln des Gebüsches stellen sich in x_1, x_2, x_3, x_4 *linear und homogen dar.*

4. Wenn wir nun in (8) x_1, x_2, x_3, x_4 als bekannt voraussetzen, dann sind die Größen x, y, z lineare Funktionen der x_i. Hingegen ist ω *durch eine quadratische Gleichung an die* x_i *gebunden.* Da nämlich

$$s = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, so folgt aus (8):

$$(9) \quad \omega^2\,[(abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2] = \triangle^2\, s$$
$$= \triangle\, \omega\,(abcx) - \triangle^2\, p$$

oder

$$(10) \quad \omega^2\, M_{xx} - \omega\,(abcx)\,\triangle + p\,\triangle^2 = 0,$$

wo $\qquad M_{xx} = (abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2$

ist. *Zu jedem Wertsystem* (x) *von* x_1, x_2, x_3, x_4 *gehören* demnach *zwei Werte* ω' *und* ω'' als Wurzeln der Gleichung (10), *also*

nach (8) auch *zwei Punkte* $P' \{x', y', z'\}$ *und* $P'' \{x'', y'', z''\}$. *Diese liegen* aber *mit dem Koordinatenanfang 0 in gerader Linie.* Denn es folgt gleichfalls aus (8):

(11) $$x' : x'' = y' : y'' = z' : z'' = \omega' : \omega'' = \omega'^2 : \omega' . \omega''$$

und da nach (10) das Produkt

(12) $$\omega' . \omega'' = \frac{p \triangle^2}{M_{xx}}$$

sein muß, und also *bei reellem* x_i das Vorzeichen von p hat, so liegen, wenn in (11) *zugleich* ω'^2 *als reell vorausgesetzt* wird, die notwendigerweise gleichfalls reellen Punkte P', P''

auf *derselben* Seite von 0 für $p > 0$ d. h. im *hyperbolischen* *) Gebüsch,

auf *verschiedener* Seite für $p < 0$ d. h. im *elliptischen* *) Gebüsch.

Ferner ist:

$$\overline{OP'}^2 . \overline{OP''}^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\ (x''^2 + y''^2 + z''^2) = s' . s''.$$

Nach (9) und (10) war nun:

$$\omega^2 \ M_{xx} = \triangle^2 s;$$

also folgt: $$(\omega' \omega'' \ M_{xx})^2 = \triangle^4 . s' . s''$$

und hieraus durch Einsetzen des Wertes von $\omega' . \omega'' = \dfrac{p \triangle^2}{M_{xx}}$ aus (12):

(13) $$s' . s'' = p^2,$$

d. h. die Punkte $P' \{x', y', z'\}$ *und* $P'' \{x'', y'', z''\}$ sind einander zugeordnet nach dem Prinzip der reziproken Radien, sie *bilden ein bezüglich des Gebüsches mit der Potenz* p *inverses Punktepaar.*

5. Nach (10) entspricht nun das reelle, inverse Punktepaar (P', P'') einem und demselben Wertsystem $(x) = x_1, x_2, x_3, x_4$. *Wir können* daher x_1, x_2, x_3, x_4 als neue Ko-

---

*) Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II. S. 46.

ordinaten einführen und sie *tetrasphärische Punktkoordinaten des Punktepaares* (x) *oder* (P', P'') *nennen.* Das in (13) erhaltene Resultat läßt sich dann als Satz folgendermaßen formulieren:

I. Satz. *Zwei bezüglich des Gebüsches* Ω *reelle, inverse Punkte* $P' \{x', y', z'\}$ *und* $P'' \{x'', y'', z''\}$ *haben dieselben tetrasphärischen Koordinaten* x_i; *diese unterscheiden sich nur durch die Werte* ω', ω'' *des gemeinsamen Faktors* ω.

Das war der Grund, weshalb wir ω eingeführt haben.

P' hat die Koordinaten $\omega' x_1, \omega' x_2, \omega' x_3, \omega' x_4$,
P'' hat die Koordinaten $\omega'' x_1, \omega'' x_2, \omega'' x_3, \omega'' x_4$.

Eine in x_1, x_2, x_3, x_4 *homogene Gleichung ändert sich also nicht, wenn wir den Punkt* $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *durch seinen inversen ersetzen.* Mit Rücksicht auf diese charakteristische Eigenschaft der tetrasphärischen Koordinaten x_i *wollen* wir *daher* nach der von Darboux für andere Koordinaten eingeführten Bezeichnungsweise x_1, x_2, x_3, x_4 *als tetrasphärische „anallagmatische" Koordinaten des Punktepaares* (x) *bezeichnen*, d. h. eben als Koordinaten, die sich durch Inversion nicht ändern (ἀν- und ἀλλάττομαι).

§ 2.

Reelle und ideale Punktepaare.

1. Setzen wir in (11)

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{\omega'^2}{\omega'\omega''} = \frac{1}{k},$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= k\, x' \\ y'' &= k\, y' \\ z'' &= k\, z' \end{aligned}\right\} \text{und hieraus:}$$

$$(x''^2 + y''^2 + z''^2) = k^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$s'' = k^2 . s'$$
$$k^2 s'^2 = s' s'' = p^2$$
$$k s' = \pm p,$$

wo noch das Vorzeichen zu bestimmen ist. Da nun

$$k = \frac{\omega'^2}{\omega' \omega''} \text{ für } \omega' \omega'' = \frac{p \triangle^2}{M_{xx}}$$

bei reellem ω' das Vorzeichen von p haben muß, so muß, da s' immer positiv ist,

$$k s' = p$$

sein und demnach für $k = \frac{p}{s'}, = \frac{p}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

$$x'' = \frac{px'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \; y'' = \frac{py'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \; z'' = \frac{pz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Wir erhalten also, wie zu erwarten war, die Formeln der Abbildung durch reziproke Radien mit der Inversionspotenz p. *Daher gilt der Satz I auch für Punkte mit imaginären Koordinaten* x, y, z, die wir im Folgenden noch zu betrachten haben werden.

2. Durch die Gleichungen (7), indem wir setzten

(1) $\omega x_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i (s + p), \quad i = 1, 2, 3, 4,$

machen wir die 5 Größen ω und x_1, x_2, x_3, x_4 von den 3 willkürlichen Veränderlichen x, y, z abhängig. Zwischen den 5 Größen $\omega, x_1, x_2, x_3, x_4$ besteht nur die eine Gleichung:

(2) $\omega^2 M_{xx} - \omega (abcx) \triangle + p \triangle^2 = 0,$

wo $M_{xx} = (abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2$

ist. Hätten wir beim Ansatz der Koordinaten x_i den Proportionalitätsfaktor ω weggelassen, so würde diese Gleichung übergehen in

$$M_{xx} - (abcx) \triangle + p \triangle^2 = 0$$

und würde eine Abhängigkeit zwischen den x_i begründen. Nach Einführung des Faktors ω dagegen können wir die

x_i als vollkommen willkürlich veränderliche, homogene Größen betrachten, während der Proportionalitätsfaktor ω der quadratischen Gleichung (2) zu genügen hat. *Indem wir jetzt die vier Kugeln $x_i = 0$ und damit die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i und p in den Gleichungen* (1) ausdrücklich *als reell voraussetzen*, wollen wir die Realitätsverhältnisse der x_i und des Faktors ω untersuchen.

3. Die Entscheidung liegt bei der Gleichung (2). Ihre Lösung ergibt:

$$(3) \qquad \omega = \frac{\triangle}{2}\frac{(abcx)}{M_{xx}} \pm \sqrt{\frac{\triangle^2 (abcx)^2 - 4\,p\,\triangle^2 M_{xx}}{4\,M^2_{xx}}}$$

$$= \frac{\triangle}{2\,M_{xx}}\left[(abcx) \pm \sqrt{F_{xx}}\right], \text{ wo}$$

$$(4) \qquad F_{xx} = (abcx)^2 - 4\,p\,M_{xx}$$
$$= (abcx)^2 - 4\,p\left[(abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2\right]$$

die Diskriminante der Gleichung (2) ist, wenn wir von dem quadratischen Faktor $\frac{1}{4\,M^2_{xx}}$ absehen.

Wir wollen nun F_{xx} in rechtwinkeligen Koordinaten ausdrücken. Nach § 1, (8) erhalten wir:

$$\omega^2 F_{xx} = \triangle^2 (s+p)^2 - 4\,p\,\triangle^2\left[x^2 + y^2 + z^2\right]$$
$$= \triangle^2 (s-p)^2.$$

Nach (9) und (10) folgt ferner:

$$\omega^2 M_{xx} = \triangle^2 . s.$$

Wir erhalten also als neuen Ausdruck für F_{xx}:

$$(5) \qquad F_{xx} = M_{xx}\frac{(s-p)^2}{s}.$$

Bevor wir nun unsere Schlüsse ziehen, wollen wir auch noch (2) umformen. Aus (4) ergibt sich:

$$M_{xx} = \frac{(abcx)^2 - F_{xx}}{4\,p},$$

wodurch (2) übergeht in:

$$(6) \qquad \omega^2 (abcx)^2 - \omega^2 F_{xx} - 4\,p\,\triangle\omega\,(abcx) + 4\,p^2\triangle^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left[\omega\,(abcx) - 2\,p\triangle\right]^2 = \omega^2 F_{xx}.$$

Hieraus erhält man als bequemen Ausdruck für ω:

$$\omega = \frac{2p\Delta}{(abcx) \mp \sqrt{F_{xx}}}, \tag{7}$$

was auch aus (3) abgelesen werden konnte.

4. Da wir die Größen a, b, c, d, p reell vorausgesetzt haben, so berechnen sich die rechten Seiten von (1) für einen reellen Punkt (x, y, z) ebenfalls reell, folglich sind auch die linken Seiten, nämlich die Produkte ωx_i reell. Es müssen also die beiden Faktoren ω und x_i jeder für sich reell sein, oder, wenn ω komplex ist [und ω_1 dazu konjugiert], so muß x_i ebenfalls komplex sein, und zwar:

$$x_i = \omega_1 \mathfrak{x}_i, \text{ wo } \mathfrak{x}_i \text{ reell ist.}$$

Dann folgt für ωx_i:

$$\omega x_i = \omega \omega_1 \mathfrak{x}_i = \Omega . \mathfrak{x}_i,$$

wo auch Ω reell ist.

Wir können also für diesen Fall die $\mathfrak{x}_i$ als Koordinaten x_i und Ω als Proportionalitätsfaktor wählen. Wir erhalten also als ersten wichtigen Hilfssatz:

II a) *Zu reellen Punkten (x, y, z) können die x_i samt ω reell gewählt werden.*

5. Außer den reellen Punktepaaren müssen wir noch ideale in Betracht ziehen. *Ein bezüglich des Gebüsches inverses und nicht reelles Punktepaar $P = (P' \{x', y', z'\}, P'' \{x'', y'', z''\})$ heiße ideal, wenn es* auf einer reellen Geraden des Gebüsches, also *auf einem Strahl durch 0, sowie auf einer reellen Kugel des Gebüsches liegt.*

Die Gerade sei gegeben durch:

$$x = t \cos\alpha;\ y = t \cos\beta;\ z = t \cos\gamma; \tag{8}$$

hierin sind α, β, γ die reellen Neigungswinkel der Geraden mit den Koordinatenachsen; x, y, z dürfen aber auch komplexe Werte annehmen. Jede reelle Kugel des Gebüsches hat nun nach § 1, (6) eine Gleichung von der Form:

$$K = ax + by + cz + d\,(s + p) = 0.$$

Liegt nun das Punktepaar P auf dieser Kugel mit reellen a, b, c, d, p, so ist:

(9) $$t(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) + d(t^2 + p) = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung nach t folgt, wenn t' und t'' die Wurzeln sind:

$t'.t''$ und $t'+t''$: reell, folglich auch

$$\left.\begin{matrix} x'x'' \\ y'y'' \\ z'z'' \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} x' + x'' \\ y' + y'' \\ z' + z'' \end{matrix}\right\} \text{ reell,}$$

woraus nebenbei zu ersehen ist, *daß ideale Punktepaare konjugiert imaginäre, rechtwinkelige Koordinaten haben*, falls O Koordinatenanfangspunkt ist.

Nach (1) folgt also für das ideale, inverse Punktepaar $P=(P', P'')$:

(10) $$\left\{\begin{aligned} \omega' x_i &= a_i x' + b_i y' + c_i z' + d_i(s' + p) \\ \omega'' x_i &= a_i x'' + b_i y'' + c_i z'' + d_i(s'' + p). \end{aligned}\right.$$

Hieraus findet sich:

(11) $$(\omega' + \omega'')x_i = a_i(x' + x'') + b_i(y' + y'') + c_i(z' + z'') + d_i(s' + s'' + 2p),$$

also *reell*, da auch

$$s' + s'' = (x' + x'')^2 + (y' + y'')^2 + (z' + z'')^2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$

reell ist. Nach (11) ist also:

$$x_h : x_k = (\omega' + \omega'')x_h : (\omega' + \omega'')x_k$$

reell, d. h. *die vier Größen x_i* verhalten sich, falls $(\omega' + \omega'') \neq 0$, wie vier reelle Zahlen und *können also reell angenommen werden.*

6. Im Falle $\omega' + \omega'' = 0$ ist nach (2),

da $\omega' + \omega'' = \dfrac{(abcx)\,\triangle}{M_{xx}}$, auch $(abcx) = 0$, da $\triangle \neq 0$, $M_{xx} \neq 0$

oder mit Rücksicht auf § 1, (8) $(s + p) = 0$, da $\omega \neq 0$.

Aus (10) wird jetzt:

$$(12)\qquad \begin{cases} \omega' x_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' \\ \omega'' x_i = a_i x'' + b_i y'' + c_i z'' \end{cases}$$

wo (13) $\quad 0 = a_i(x' + x'') + b_i(y' + y'') + c_i(z' + z'')$

ist. Die Größen x' und x'', y' und y'', z' und z'' sind aber konjugiert imaginär. Sei etwa in reelle und imaginäre Bestandteile zerlegt:

$$\begin{array}{l|c|l} x' = \xi_1 + i\,\xi_2 & & x'' = \xi_1 - i\,\xi_2 \\ y' = \eta_1 + i\,\eta_2 & \text{dann ist} & y'' = \eta_1 - i\,\eta_2 \\ z' = \zeta_1 + i\,\zeta_2 & & z'' = \zeta_1 - i\,\zeta_2 \end{array}$$

und nach (13)

$$(14)\qquad 0 = a_i\,\xi_1 + b_i\,\eta_1 + c_i\,\zeta_1.$$

Also ist nach (12):

$$\omega' x_i = a_i\,\xi_1 + b_i\,\eta_1 + c_i\,\zeta_1 + i\,(a_i\,\xi_2 + b_i\,\eta_2 + c_i\,\zeta_2)$$
$$\omega'' x_i = a_i\,\xi_1 + b_i\,\eta_1 + c_i\,\zeta_1 - i\,(a_i\,\xi_2 + b_i\,\eta_2 + c_i\,\zeta_2)$$

d. h. mit Rücksicht auf (14):

$$\omega' x_i = \quad i\,(a_i\,\xi_2 + b_i\,\eta_2 + c_i\,\zeta_2) = \quad i\,m_i$$
$$\omega'' x_i = -\,i\,(a_i\,\xi_2 + b_i\,\eta_2 + c_i\,\zeta_2) = -\,i\,m_i$$

Es verhalten sich also die Größen x_1, x_2, x_3, x_4 wiederum wie vier reelle Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4, die man als x_i wählen kann. Wir erhalten somit als zweiten Hilfssatz:

II b. *Zu idealen Punkten können die x_i ebenfalls reell gewählt werden.*

7. Wenn nun in (10) die rechte Seite komplex ist, also auch ωx_i komplex, während x_i reell sein soll, so muß offenbar ω den imaginären Anteil tragen. Nun ist aber bei reellem x_i nach (3):

ω reell für $F_{xx} \geqq 0$, gibt reelle Punkte

ω komplex für $F_{xx} < 0$, gibt ideale Punkte,

was sich an den Gleichungen § 1, (8) für reelle Punkte direkt

verifizieren läßt. Als zusammenfassendes Resultat erhalten wir also den schönen Satz:

II. Satz. *Reellen und idealen Punkten kann man reelle x_i zuweisen; sie unterscheiden sich dann dadurch, daß bei*
reellen Punkten ω *reell,* $F_{xx} \geq 0$
idealen Punkten ω *komplex,* $F_{xx} < 0$ ist.

Umgekehrt gehören zu reellen x_i immer nur reelle oder ideale Punktepaare des Gebüsches, was unmittelbar aus den Formeln § 1, (8) abzulesen ist, wenn man beachtet, daß ideale Punktepaare konjugiert imaginäre Koordinaten x, y, z haben.

§ 3.

Abbildung des Gebüsches auf den Punktraum, Gebilde erster Ordnung.

1. Wir führen jetzt eine Abbildung der durch die x_i bestimmten Punktepaare auf einfache Punkte des Raumes ein. Vier beliebige Werte von x_1, x_2, x_3, x_4 legen als anallagmatische Koordinaten ein bestimmtes inverses Punktepaar (P', P'') im Gebüsche fest. Wir nehmen jetzt im Raum ein beliebiges Tetraeder als Koordinatentetraeder an und konstruieren den Punkt P, der x_1, x_2, x_3, x_4 zu gewöhnlichen homogenen Punktkoordinaten hat. Dadurch werden die Punktepaare (P', P'') des Gebüsches in eindeutiger Weise auf die Punkte des gewöhnlichen Raumes R abgebildet. Wir nennen P das „Bild“ des Punktepaares (P', P''). Da die x_i immer reell sind, so erhalten wir damit den Satz:

Reellen und imaginären Punktepaaren des Gebüsches Ω entsprechen reelle Bildpunkte des Raumes R.

2. Die Frage, wie sich diese Bildpunkte in ihrer geometrischen Lage voneinander unterscheiden, hängt nach Satz II von der quadratischen Form F_{xx} ab. *Nach Formel* (5)

$$F_{xx} = M_{xx} \frac{(s-p)^2}{s}$$

liefert die Gleichung $F_{xx} = 0$ *im Gebüsch* Ω *die reellen oder idealen Punktepaare, die auf der reellen oder idealen Orthogonalkugel des Gebüsches liegen.* Denn da $M_{xx} \neq 0$ und $s \neq 0$, folgt für $F_{xx} = 0$

$$(s-p)^2 = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$s = p.$$

Die Mannigfaltigkeit der Punkte der Orthogonalkugel ist zweifach unendlich; jeder Punkt derselben ist, was geometrisch sofort einleuchtet, sich selbst invers und repräsentiert einen Doppelpunkt. Für alle reellen oder idealen Punktepaare, die nicht auf der Orthogonalkugel liegen, muß dann also

$$F_{xx} \gtrless 0$$

sein. In der Abbildung gibt $F_{xx} = 0$ eine Fläche 2. Ordnung. Wir wollen diese Fläche die „*absolute Fläche*" *oder kurz die* „*Absolute*" *der Abbildung* nennen; sie *trennt die Bildpunkte der reellen und idealen Punktepaare,* indem die Bildpunkte der einen Art ganz im Innern, die der andern Art ganz im Äußern der Absoluten liegen werden.

Wir denken uns nun das Vorzeichen der tetraedrischen Koordinaten so bestimmt, daß den Koordinaten des Punktes O, nämlich

$$x_i = d_i \text{*)},$$

für welche $\quad F_{xx} = F_{dd} = (abcd)^2 = \triangle^2 > 0$

wird, ein *innerer* Punkt der Absoluten entspricht. Dann

---

*) Nach § 1, (7) ist $\omega x_i = p d_i$; setzt man hierin, was ja erlaubt ist, $x_i = d_i$, so findet sich [§ 1, (10)] $\omega = p$.

liegen alle Bildpunkte reeller Punktepaare im Innern der Absoluten, und wir erhalten also folgendes Schlußergebnis :

III. Satz. *Die reellen oder idealen Punktepaare werden durch reelle Punkte des projektiven Raumes abgebildet, und zwar gehören die Bildpunkte reeller Punktepaare dem Innern der Absoluten, die Bildpunkte idealer Punktepaare dem äußern dieser Fläche an.*

3. Da die Kugeln des Gebüsches sich in der Form darstellen lassen

$$u_x = u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0,$$

so gilt der Satz :

IV. Satz. *Die Bilder der Kugeln des Gebüsches sind Ebenen, die Bilder der Kreise des Gebüsches also gerade Linien.*

Bezeichnet man also, wie es Herr Professor Dr. Wellstein eingeführt hat (Weber-Wellstein, Enzyklopädie d. El.-M. Bd. II, S. 54, 2), die Punktepaare des Gebüsches als „Pseudopunkte", die Kugeln des Gebüsches als „Pseudoebenen", die Kreise des Gebüsches als „Pseudogeraden", so erfüllen diese Pseudo-Punkte, -Ebenen, -Geraden die Hilbert'schen Axiome der Verknüpfung. *Unsere Formeln bilden also die analytische Grundlage für die in Weber-Wellstein l. c. gegebenen Versinnlichungen der beiden Nichteuklidischen Geometrieen.* Wir werden darauf noch zurückkommen.

Deutet man die Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ im Raume R, so werden die vier Größen u , u_2, u_3, u_4, da ihre Verhältnisse die Ebene $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ eindeutig festlegen, als homogene „Koordinaten" dieser Ebene bezeichnet ; wir sprechen dann von „Ebenenkoordinaten" u_1, u_2, u_3, u_4 im Gegensatz zu den Punktkoordinaten x_1, x_2,

x_3, x_4. Unser Abbildungsverfahren legt es nahe, diese Begriffsbildung auf das Kugelgebüsch zu übertragen:

Satz V. *Ist also $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ die Gleichung einer Kugel des Gebüsches, so nennen wir u_1, u_2, u_3, u_4 die homogenen Flächenkoordinaten dieser Kugel k. Ein Punktepaar $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ liegt auf der durch ihre Flächenkoordinaten $(u) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ gegebenen Kugel, wenn $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ ist.*

Da $\omega x_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i\,(s + p)$,

also (1) $\omega u_x = a_u x + b_u y + c_u z + d_u\,(s + p)$,

so ist nach § 1, (3)

(2) $\dfrac{\omega u_x}{d_u}$

die Potenz der beiden durch (x) festgelegten Punkte oder, wie wir kurz sagen, die Potenz des Punktepaares (x) bezüglich der Kugel (u). Im Raume R ist $\dfrac{\omega u_x}{d_u}$ zum Abstande des Punktes (x) von der Ebene (u) proportional. Bei festgehaltenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 stellt die Gleichung $u_x = 0$ im Raume R eine zweifach unendliche Anzahl von Ebenen dar, die den Punkt (x) enthalten, also ein Ebenenbündel. Im Gebüsch erhält man also das System der Kugeln des Gebüsches, die durch das durch $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ festgelegte Punktepaar gehen, also ein Kugelbündel.

4. Unsere Abbildung legt es ferner nahe, nachdem die Punktkoordinaten und Ebenenkoordinaten des Raumes R im Kugelgebüsch ein Analogon gefunden haben, auch die homogenen Strahlen- und Achsenkoordinaten von R auf das Gebüsch zu übertragen:

$$p_{hk} = x_h y_k - x_k y_h \quad \Big| \quad \pi_{hk} = u_h v_k - u_k v_h,$$

wo x_i, y_i die Punktkoordinaten, u_i, v_i Flächenkoordinaten

sind. *Im Gebüsch stellt dann z. B. die in den p lineare Gleichung*

$$a_{12}p_{12} + a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34} = 0,$$

der in R ein linearer Komplex entspricht, ein dreifach unendliches System von Kreisen des Gebüsches dar, d. h. einen „linearen Kreiskomplex"; durch jedes Punktepaar des Gebüsches geht dann ein Kreisbüschel des Komplexes, das auf einer bestimmten Kugel des Gebüsches liegt, und auf jeder Kugel des Gebüsches liegt ein Kreisbüschel, das dem Komplex angehört; die Kreise dieses Büschels schneiden sich in einem Punktepaar des Gebüsches. Man überträgt mühelos die Sätze vom Nullsystem, das der lineare Komplex in R bestimmt, auf das Kugelgebüsch, doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen. Jedenfalls zeigt sich schon hier die Nützlichkeit unseres anallagmatischen Koordinatensystems und die Fruchtbarkeit der Begriffsbildung, auf der es beruht.

§ 4.

Abbildung des Gebüsches auf den Raum, Gebilde zweiter Ordnung.

1. Wir wollen nun auch die Gleichungen zweiten Grades in anallagmatischen Punkt- und Flächenkoordinaten deuten. Die quaternäre quadratische Form

$$f_{xx} = \sum_{h,k} p_{hk}\, x_h x_k, \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

oder symbolisch

$$f_{xx} = p^2_x$$

läßt sich mittels der Formeln § 1, (7)

$$\omega x_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i(s+p)$$

leicht in Kartesische Koordinaten umrechnen. Es ist symbolisch:

$$\begin{aligned}\omega^2 p^2_x &= [p_a x + p_b y + p_c z + p_d (s+p)]^2 \\ &= p^2_a x^2 + p^2_b y^2 + p^2_c z^2 + p^2_d (s+p)^2 + 2p_a p_b xy + \\ &\quad 2p_b p_c yz + 2p_c p_a xz + 2(s+p)\,[p_a p_d \cdot x + p_b p_d \cdot y + \\ &\quad + p_c p_d \cdot z]\end{aligned}$$

oder, wenn wir mit f'_{xy} die Polare

$$f'_{xy} = \sum_{h,k} a_h a_k x_h y_k = p_x p_y$$

bezeichnen.

$$\begin{aligned}\omega^2 f'_{xx} &= f'_{aa} \cdot x^2 + f'_{bb} \cdot y^2 + f'_{cc} \cdot z^2 + f'_{dd} \cdot (s+p)^2 \\ &+ 2\left[f'_{ab} \cdot xy + f'_{bc} \cdot yz + f'_{ac} \cdot xz\right] \\ &+ 2(s+p)\left[x \cdot f'_{ad} + y f'_{bd} + z \cdot f'_{cd}\right].\end{aligned}$$

Die Gleichung $f'_{xx} = 0$ stellt daher im Gebüsche eine Fläche 4. Ordnung dar, die den unendlich fernen Kugelkreis doppelt enthält, also eine Cyklide. Die Cyklide geht durch die Inversion des Gebüsches in sich selbst über, ist also eine anallagmatische Fläche.

2. Die Cykliden sind also im Gebüsch die Analoga zu den Flächen 2. Ordnung des Raumes R. *Den Flächen 2. Klasse von R entsprechen* daher *die Kugelsysteme des Gebüsches, die eine Cyklide umhüllen* von Ausartungen abgesehen. Die Gleichung von $f'_{xx} = 0$ in Flächenkoordinaten lautet:

$$\varphi_{uu} = 0,$$

wo symbolisch $\varphi_{uu} = (pp'p''u)^2$
ist, falls $f'_{xx} = p^2_x = p'^2_x = p''^2_x$ ist.

3. Die Klassifikation der Flächen 2. Ordnung und der Flächen 2. Klasse, die man in der analytischen Geometrie

auf die Formen f und φ stützt, ist jetzt unmittelbar auf die Cyklide übertragbar. Wir können hier darauf nicht genauer eingehen, sondern müssen uns mit einigen geometrisch interessanten Fällen begnügen.

Die allgemeine Cyklide ohne Doppelpunkte, also das Analogon der eigentlichen Fläche 2. Ordnung, läßt sich durch Inversion stets in eine symmetrische Cyklide verwandeln (vergl. G. Kalbfleisch, Diss. 1902, Symmetrische Cykliden S. 5). Wählt man die drei Koordinatenebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ zu Symmetrieebenen, so ist die symmetrische Cyklide gegeben durch die Gleichung:

(1) $$[x^2 + y^2 + z^2]^2 + 2Ax^2 + 2By^2 + 2Cz^2 + D = 0.$$

Hierin ist D das Quadrat der Inversionspotenz, die die Fläche in sich transformiert. Für unser Gebüsch Ω wird also $D=p^2$.

Aus (1) folgt demnach mit Einführung von $s=(x^2+y^2+z^2)$:

(2) $$(s+p)^2 - 2sp - p^2 + 2Ax^2 + 2By^2 + 2Cz^2 + p^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$(s+p)^2 + 2(A-p)\,x^2 + 2(B-p)\,y^2 + 2(C-p)\,z^2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich nun durch Einsetzen der Werte aus § 1, (8)

(3) $$(abcx)^2 + 2(A-p)\,(bcdx)^2 + 2(B-p)\,(cadx)^2 + 2(C-p)\,(abdx)^2 = 0$$

als Gleichung der symmetrischen Cyklide in anallagmatischen Koordinaten.

4. Diese Gleichung vereinfacht sich noch, wenn wir

$$(abcx) = \xi_4,\quad (bcdx) = \xi_1,\quad (cadx) = \xi_2,\quad (abdx) = \xi_3$$

als neue Koordinaten einführen. Die Gleichung (3) der symmetrischen Cyklide lautet dann:

(4) $$\xi^2_4 + 2(A-p)\,\xi^2_1 + 2(B-p)\,\xi^2_2 + 2(C-p)\,\xi^2_3 = 0.$$

Hierin bedeutet mit Rücksicht auf die Formeln § 1, (8), da $\omega \neq 0$ und $\triangle \neq 0$:

$$\xi_1 = -\frac{\triangle x}{\omega} = 0 \text{ die Symmetrieebene } x = 0$$

$$\xi_2 = -\frac{\triangle y}{\omega} = 0 \quad ,, \qquad ,, \qquad y = 0$$

$$\xi_3 = -\frac{\triangle z}{\omega} = 0 \quad ,, \qquad ,, \qquad z = 0$$

$$\xi_4 = \frac{\triangle (s+p)}{\omega} = 0 \text{ die Kugel } s = x^2 + y^2 + z^2 = -p.$$

Im elliptischen Gebüsch erhalten wir also für diesen Fall eine *reelle Kugel;* im *hyperbolischen Gebüsch* ist *Centrum und Potenz dieser Kugel gleichfalls reell,* dagegen *nicht ihr Radius.* Im elliptischen Gebüsch lassen sich dann ferner die Schnittpunkte der Kugel $\xi_4 = 0$ mit den Koordinatenachsen bestimmen. Die Gleichung $x = 0$, oder, was dasselbe ist,

$$\xi_1 = (bcdx) = 0$$

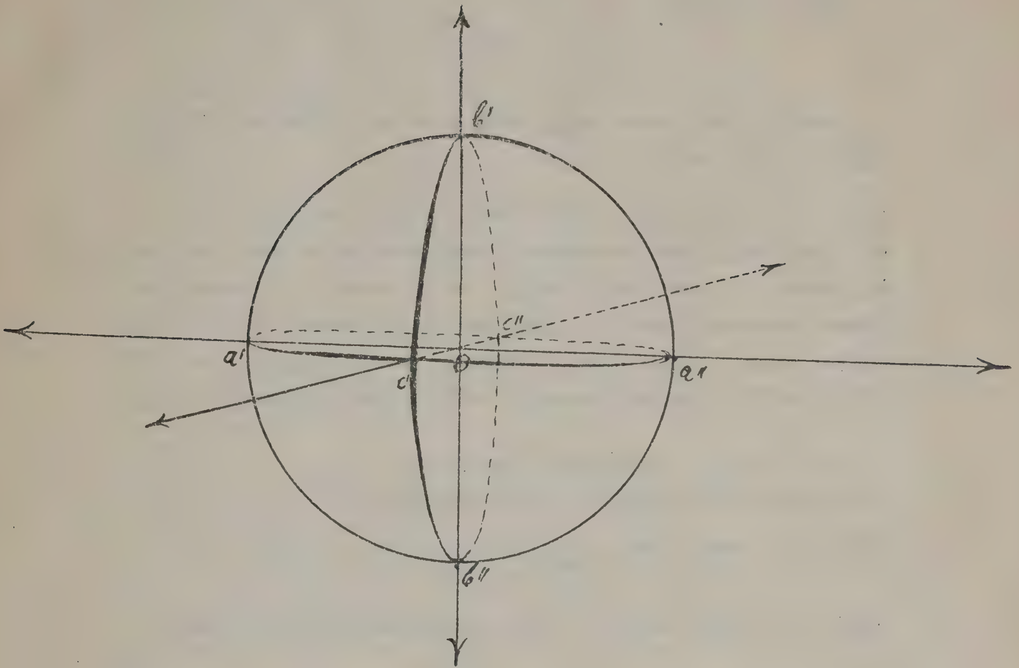
ist nämlich durch drei Wertsysteme von $(x) = x_1, x_2, x_3, x_4$ befriedigt, nämlich durch:

$$(x) = (b)\,; \qquad (x) = (c)\,; \qquad (x) = (d).$$

Die Symmetrieebene $x = 0$ enthält also die Punktepaare (b), (c) und (d). Ebenso folgt aus:

$(cadx) = \xi_2 = 0$, die S. E. $y = 0$ enthält die Punktepaare $(a), (c), (d)$
$(abdx) = \xi_3 = 0$,, $z = 0$,, ,, $(a), (b), (d)$
$(abcx) = \xi_4 = 0$, die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = -p$,, $(a), (b), (c)$,

Der Punkt (d) ist also allen drei Symmetrieebenen gemeinsam und liegt daher in 0, dem Koordinatenanfang und Centrum der Kugel $s = -p$. Diese schneidet die x-Achse im Punktepaar $(a) = (a', a'')$, die y-Achse in $(b) = (b', b'')$, die z-Achse in $(c) = (c', c'')$, vergl. Figur.



5. Zu den Cykliden gehören auch als besondere Fälle die aus je zwei bezüglich des Gebüsches inversen Kugeln gebildeten Kugelpaare. Diese beiden Kugeln gehören natürlich nur dann zum Gebüsch, wenn sie zusammenfallen. Die Gleichung einer beliebigen Kugel ist von der Form

(5) $$\omega u_x - k d_u = 0,$$

worin nach § 3, (1)

(6) $$\omega u_x - k d_u = a_u x + b_u y + c_u z + d_u (s + p - k)$$

ist. Denn wenn eine *beliebige* Kugel in rechtwinkeligen Koordinaten gegeben ist:

$$ax + by + cz + d(s + q) = 0,$$

so hat man u_i zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$a_u = a\,;\ \ b_u = b\,;\ \ c_u = c\,;\ \ d_u = d\,;\ \ [p - k = q],$$

deren Auflösungsdeterminante $\triangle \neq 0$ ist.

Aus (5) folgt:

$$\omega = \frac{kd_u}{u_x}.$$

Setzt man diesen Wert von ω in die Gleichung § 2, 6 ein, so ergibt sich:

(7) $$[kd_u (abcx) - 2p \triangle u_x]^2 - k^2 d^2_u F_{xx} = 0$$

als Gleichung einer beliebigen Kugel samt ihrer inversen, da in dieser Gleichung die Größe ω nicht mehr vorkommt. In dieser Gleichung sind fünf Parameter enthalten: u_1, u_2, u_3, u_4 und k, aber für diese fünf Parameter ist sie homogen, so daß (7) in der Tat vierfach unendlich viele Kugeln darstellen kann.

6. Aus (6) entnimmt man ferner:
die Potenz der Kugel (7) *im Punktepaar* $(x) = x_1, x_2, x_3, x_4$ *ist*

(8) $$\frac{\omega u_x - kd_u}{d_u}$$ (vergl. Seite 22, § 3, (2))

und *ihr Mittelpunkt hat die rechtwinkeligen Koordinaten*

(9) $$\xi = -\frac{a_u}{2d_u};\ \eta = -\frac{b_u}{2d_u};\ \zeta = -\frac{c_u}{2d_u}.$$

Die tetrasphärischen Koordinaten des Mittelpunktes O des Gebüsches darf man nach § 1, (7) mit $x_i = d_i$ ansetzen; *) dann ist $\omega = p$ und demnach $(p-k)$ *die Potenz der Kugel* (7) *in* O. Der Radius r einer Kugel mit dem Mittelpunkt ξ, η, ζ und der Potenz $q = (p-k)$ in O ist aber bestimmt durch:

$$q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - r^2,$$

(vergl. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln 1879, § 19, 1). Also ist:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (p-k)$$

$$= \frac{a^2_u + b^2_u + c^2_u}{4d^2_u} - (p-k)$$

---

*) vergl. Fußnote S. 18.

oder, wenn man

(10) $$\Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u$$

einführt, so folgt für r^2:

(11) $$r^2 = \frac{\Phi_{uu} + 4kd^2_u}{4d^2_u}.$$

Die Kugeln des Gebüsches sind charakterisiert durch $k = 0$. Der Radius von $u_x = 0$ ist also gegeben durch:

(12) $$r^2 = \frac{\Phi_{uu}}{4\,d^2_u}.$$

§ 5.

Dualität von F_{xx} und Φ_{uu}.

1. Nach § 4, (12) war der Radius einer beliebigen Kugel $u_x = 0$ des Gebüsches gegeben durch:

(1) $$\begin{cases} r^2 = \dfrac{\Phi_{uu}}{4d^2_u}, \text{ wo} \\ \Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4\,pd^2_u \end{cases}$$

war; $r^2 = 0$ ergibt also:

(2) $$\Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4\,pd^2_u = 0.$$

Was heißt das geometrisch?

u_x muß als Kugel des Gebüsches die Orthogonalkugel senkrecht schneiden. Läßt man also den Radius von u_x immer kleiner und schließlich null werden, so reduziert sich u_x zu einem Punkte, der auf der Orthogonalkugel liegen muß. In anderen Worten: *$r^2 = 0$ oder $\Phi_{uu} = 0$ stellt die zweifach unendliche Anzahl der Punktkugeln des Gebüsches dar.* Da diese nun alle auf der Orthogonalkugel liegen müssen, so können wir sagen:

Satz VI. $\Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u = 0$ *ist die Gleichung der Orthogonalkugel in Flächenkoordinaten, während wir für die Gleichung derselben Kugel in Punktkoordinaten* $F_{xx} = 0$ *gefunden haben* (§ 3, 2).

Im hyperbolischen Gebüsch ist diese Kugel reell, im elliptischen dagegen imaginär, oder genauer ideal, da ihre Punktepaare ideal sind. Greifen wir zu unserer Abbildung in § 3 zurück, so legen die x_i einfache Punkte fest, die u_i dagegen Ebenen.

$F_{xx} = 0$ ist die Gleichung einer *Fläche* 2. *Ordnung*, der „Absoluten".

$\Phi_{uu} = 0$ ist die Gleichung einer *Fläche* 2. *Klasse*.

Beide Flächen sind identisch, weil sie es im Gebüsche sind.

2. Das läßt sich auch formal beweisen:

Ist nämlich eine Fläche 2. Klasse symbolisch gegeben durch:

(3) $$\Phi_{uu} = \Phi^2_u = \varphi^2_u = \varphi'^2_u = \psi^2_u = 0,$$

so ist die Gleichung derselben Fläche in Punktkoordinaten (cf. § 4, 2) gegeben durch $F_{xx} = 0$, wo bis auf einen numerischen noch zu bestimmenden Faktor γ:

$$\gamma . F_{xx} = (\psi\varphi\varphi' x)^2 = \Psi^2_{\varphi\varphi' x}, \text{ da}$$

$$(\psi\varphi\varphi' x) = \psi_1(\varphi\varphi' x)_1 + \psi_2(\varphi\varphi' x)_2 + \psi_3(\varphi\varphi' x)_3 + \psi_4(\varphi\varphi' x)_4 = \Psi_{\varphi\varphi' x}.$$

$\Psi^2_{\varphi\varphi' x}$ geht aber aus $\Phi^2_u = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u$ hervor, indem wir setzen:

$$u_i = (\varphi\varphi' x)_i.$$

Demnach ist:

$$\gamma . F_{xx} = (a\varphi\varphi' x)^2 + (b\varphi\varphi' x)^2 + (c\varphi\varphi' x)^2 - 4p(d\varphi\varphi' x)^2.$$

Nun ist aber:

$$(a\varphi\varphi' x)^2 = (\varphi' a\varphi x)^2$$
$$(b\varphi\varphi' x)^2 = (\varphi' b\varphi x)^2$$
$$(c\varphi\varphi' x)^2 = (\varphi' c\varphi x)^2$$
$$(d\varphi\varphi' x)^2 = (\varphi' d\varphi x)^2.$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite gehen aus φ'^2_u hervor, indem wir setzen

$$u_i = (a\varphi x)_i, \quad (b\varphi x)_i, \ (c\varphi x)_i, \ (d\varphi x)_i \quad \text{d. h. es ist:}$$

$$(\varphi' a\varphi x)^2 = (ba\varphi x)^2 + (ca\varphi x)^2 - 4p(da\varphi x)^2$$
$$(\varphi' b\varphi x)^2 = (ab\varphi x)^2 + (cb\varphi x)^2 - 4p(db\varphi x)^2$$
$$(\varphi' c\varphi x)^2 = (ac\varphi x)^2 + (bc\varphi x)^2 - 4p(dc\varphi x)^2$$
$$(\varphi' d\varphi x)^2 = (ad\varphi x)^2 + (bd\varphi x)^2 + (cd\varphi x)^2.$$

Hieraus folgt für $\gamma . F_{xx}$:

$$\gamma . F_{xx} = 2[(\varphi abx)^2 + (\varphi bcx)^2 + (\varphi cax)^2] - 8p[(\varphi adx)^2 + (\varphi bdx)^2 + (\varphi cdx)^2];$$

Die Ausdrücke rechts gehen wieder aus φ^2_u hervor, indem wir u_i entsprechend ersetzen:

$$(\varphi abx)^2 = (cabx)^2 - 4p(dabx)^2$$
$$(\varphi bcx)^2 = (abcx)^2 - 4p(dbcx)^2$$
$$(\varphi cax)^2 = (bcax)^2 - 4p(dcax)^2$$
$$(\varphi adx)^2 = (badx)^2 + (cadx)^2$$
$$(\varphi bdx)^2 = (abdx)^2 + (cbdx)^2$$
$$(\varphi cdx)^2 = (acdx)^2 + (bcdx)^2.$$

Da nun:

$$M_{xx} = (abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2,$$

so ist

$$\gamma . F_{xx} = 6(abcx)^2 - 24pM_{xx} = 6F_{xx},$$

so daß $\gamma = 6$ sein muß.

Nach § 2, (4) ist F_{xx} die Diskriminante der Bestimmungsgleichung für ω und $F_{xx} = 0$ die Gleichung der Orthogonalkugel.

Damit ist also verifiziert, daß

$$\Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u = 0$$

die Gleichung der Orthogonalkugel bezw. im Bilde die Gleichung *der „Absoluten“ in Flächenkoordinaten* ist.

3. Für eine spätere Anwendung wollen wir zunächst rein formal die Polarentheorie der beiden dualistisch einander gegenüberstehenden Formen F_{xx} und Φ_{uu} entwickeln.

Die geometrische Bedeutung dieser Gebilde wird sich dann gleichfalls erst später herausstellen.

Dem durch x_1, x_2, x_3, x_4, festgelegten Punktepaare (x) *ordnen wir bezüglich* $F_{xx} = 0$ *eine „Polare"* (u) *zu, die durch die Gleichung*

$$(4)\quad F_{xy} = 0$$

in laufenden Koordinaten y *gegeben ist,* wo

$$(5)\begin{cases} F_{xx} = (abcx)^2 - 4p[(abdx)^2 + (bcdx)^2 + (cadx)^2], \\ F_{xy} = (abcx)\,(abcy) - 4p[(abdx)\,(abdy) + (bcdx)\,(bcdy) + (cadx)\,(cady)] \end{cases}$$

ist.

Die Flächenkoordinaten dieser Polaren sind also:

$$(6)\quad u_i = F_{xi} = (abcx)\,(abc)_i - 4p[(abdx)\,(abd)_i + (bcdx)\,(bcd)_i + (cadx)\,(cad)_i].$$

Der durch u_1, u_2, u_3, u_4 festgelegten Fläche (u) *ordnen wir bezüglich* $\Phi_{uu} = 0$ *ein „Polpaar"* (x) *zu, das durch die Gleichung:*

$$(4')\quad \Phi_{uv} = 0$$

in laufenden Koordinaten v *gegeben ist,* wo

$$(5')\begin{cases} \Phi_{uu} = a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u \\ \Phi_{uv} = a_u a_v + b_u b_v + c_u c_v - 4pd_u d_v \end{cases}$$

ist.

Die Punktkoordinaten des Polpaares sind also:

$$(6')\quad x_i = \Phi_{ui} = a_u a_i + b_u b_i + c_u c_i - 4pd_u d_i.$$

Aus

$$\Phi_{uw} = a_u a_w + b_u b_w + c_u c_w - 4pd_u d_w$$

folgt aber wegen (6):

$$(7)\quad \Phi_{uw} = a_w F_{xa} + b_w F_{xb} + c_w F_{xc} - 4pd_w F_{xd}$$

oder, da aus (5) sich für

$$F_{xa} = 4p\triangle\,(bcdx)\,;\ F_{xb} = 4p\triangle\,(cadx)\,;\ F_{xc} = 4p\triangle\,(abdx)\,;\ F_{xd} = \triangle(abcx)$$

ergibt,

$$(8)\quad \Phi_{uw} = 4p\triangle[a_w(bcdx) + b_w(cadx) + c_w(abdx) - d_w(abcx)]$$

Nun ist aber nach den Transformationsformeln § 1, (8):

$$a_w(bcdx) + b_w(cadx) + c_w(abdx) - d_w(abcx)$$
$$= - a_w \frac{\Delta}{\omega} x - b_w \frac{\Delta}{\omega} y - c_w \frac{\Delta}{\omega} z - d_w \frac{\Delta}{\omega} (s + p)$$
$$= - \Delta w_x.$$

Daher ist endlich:

(9) $$\Phi_{uw} = - 4p \Delta w_x$$

gültig, wenn (u) *die Polare von* (x) *ist bezüglich* $F_{xx} = 0$.

Diese elegante Formel ergibt für $w_i = u_i' = F_{xi}$ unmittelbar:

(10) $$\Phi_{uu} = - 4p \Delta F_{xx},\ u_x = F_{xx}$$

gültig, *wenn* (u) *die Polare von* (x) *bezüglich* $F_{xx} = 0$ *ist.*

Durchläuft also das Punktepaar (x) die Fläche $F_{xx} = 0$, so umhüllt die Kugel (u) die Fläche $\Phi_{uu} = 0$ und, da auch $u_x = 0$, so liegt dabei (x) auf der Kugel (u). Als Kugel mit verschwindendem Radius ist dann (u) mit (x) identisch, und (u) ist also eine Punktkugel, wie wir schon in 1. gesehen haben. *Von den Punktkugeln müssen wir daher sagen, daß sie die Kugel* $F_{xx} = 0$ *„sphärisch berühren", wie wir auch in der Abbildung des* § 3 *bemerken, daß die der Gleichung* $\Phi_{uu} = 0$ *genügenden Ebenen die Absolute* $F_{xx} = 0$ *berühren.* $\Phi_{uu} = 0$ *ist also in der Tat die Gleichung von* F_{xx} *in Flächenkoordinaten.*

Die Gleichung in § 4, 5

$$\left[kd_u(abcx) - 2p\Delta u_x\right]^2 - k^2 d^2_u F_{xx} = 0$$

eines inversen Kugelpaares ist demnach so zu deuten, daß dieses Kugelpaar die Orthogonalkugel $F_{xx} = 0$ *längs des Kreises*

$$kd_u(abcx) - 2p\Delta u_x = 0,\ F_{xx} = 0$$

sphärisch berührt, d. h. z. B. im hyperbolischen Gebüsch: wenn jenes Kugelpaar die Orthogonalkugel F in einem Kreise k schneidet, so hat längs dieses Kreises k jenes Kugelpaar mit F dieselben Punktkugeln gemein, und diese Punkt-

kugeln berühren sphärisch das Kugelpaar. In der Abbildung ist das ohne weiteres klar.

5. Ist (y) das Polpaar von (w), also

$$w_i = v_i = F_{yi},$$

so folgt aus (10)

$$\Phi_{uv} = -4p\triangle F_{xy} \tag{11}$$

wenn (u) die Polare von (x) ist,
wenn (v) die Polare von (y) ist.

§ 6.

Winkelmessung.

1. Wir nehmen nun zwei Kugeln des Gebüsches an, $u_x = 0$ und $v_x = 0$, mit den Koordinaten ξ, η, ζ, p und $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p$. Diese Kugeln schneiden sich unter einem Winkel φ, der sich mittels des Kosinussatzes leicht berechnen läßt (vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 4. Aufl. S. 152). Es ist nämlich:

$$\cos^2\varphi\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - p)\,(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - p)$$
$$= \left(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 - \frac{p+p}{2}\right)^2$$

Hieraus ergibt sich mittels der Formeln § 4, (9):

$$\cos^2\varphi\,\frac{a^2_u + b^2_u + c^2_u - 4pd^2_u}{4d^2_u} \cdot \frac{a^2_v + b^2_v + c^2_v - 4pd^2_v}{4d^2_v}$$
$$= \left(\frac{a_u a_v + b_u b_v + c_u c_v - 4pd_u d_v}{4d_u d_v}\right)^2$$

oder in der Bezeichnungsweise des § 5, (5′)

$$\cos^2\varphi\,\frac{\Phi_{uu}}{4d^2_u}\,\frac{\Phi_{vv}}{4d^2_v} = \left(\frac{\Phi_{uv}}{4d_u d_v}\right)^2$$

Also folgt für $\cos\varphi$:

$$\cos\widehat{uv} = \cos\varphi = \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}} \tag{1}$$

als Winkel der Kugeln u_x und v_x des Gebüsches.

Für den besonderen Fall, daß sich die Kugeln rechtwinkelig schneiden, d. h. für $\varphi = 90°$, erhalten wir:

$$\Phi_{uv} = a_u a_v + b_u b_v + c_u c_v - 4pd_u d_v = 0$$

als *Bedingung der Orthogonalität von* u_x *und* v_x; dann sind also u_x und v_x *zu einander konjugiert bezüglich* $\Phi_{uu} = 0$.

2. Aus (1) folgt:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi^2_{uv}}{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}} = \sin \widehat{uv}. \tag{2}$$

Demnach ist:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{\Phi_{uv} + i\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi^2_{uv}}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \frac{\Phi_{uv} - i\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi^2_{uv}}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}.$$

Also:

$$e^{2i\varphi} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}} \tag{3}$$

und daraus:

$$\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}} \tag{4}$$

als Darstellung des Winkels φ *der Kugeln* u_x *und* v_x *durch ihre Beziehung zur Kugel* $\Phi = 0$.

3. Die Bedeutung dieses Ausdruckes ergibt sich noch durch folgende Betrachtung, die durch die in §§ 3 und 4 besprochene Abbildung des Gebüsches auf den Raum R der projektiven Geometrie nahe gelegt wird. Wie es in der projektiven Metrik üblich ist, nehmen wir zu den Kugeln u und v, deren Winkel untersucht wird, noch zwei andere Kugeln w und t hinzu. Dann ist nach (2):

$$\left(\frac{\sin\widehat{uw}}{\sin\widehat{vw}} : \frac{\sin\widehat{ut}}{\sin\widehat{vt}}\right)^2 = \frac{\Phi_{uu}\Phi_{ww} - \Phi^2_{uw}}{\Phi_{vv}\Phi_{ww} - \Phi^2_{vw}} : \frac{\Phi_{uu}\Phi_{tt} - \Phi^2_{ut}}{\Phi_{vv}\Phi_{tt} - \Phi^2_{vt}}. \tag{5}$$

Läßt man w und t (als Punktkugeln) die Fläche Φ berühren, so ist:

$$\Phi_{ww} = 0; \quad \Phi_{tt} = 0,$$

und es folgt aus (5):

$$\text{(6)} \qquad \frac{\sin \widehat{uw}}{\sin \widehat{vw}} : \frac{\sin \widehat{ut}}{\sin \widehat{vt}} = \frac{\Phi_{uw}}{\Phi_{vw}} : \frac{\Phi_{ut}}{\Phi_{vt}}.$$

Gehen w und t zugleich durch die Linie $\overline{u\,v}$, d. h. sind w und t die als Punktkugeln aufgefaßten Schnittpunkte des den Kugeln u und v gemeinsamen Kreises mit der reellen oder imaginären Orthogonalkugel, so sind w_i, t_i von der Form:

$$\text{(7)} \qquad w_i = u_i + \lambda' v_i; \; t_i = u_i + \lambda'' v_i,$$

wo λ', λ'' der Gleichung $\Phi_{ww} = 0$ oder $\Phi_{tt} = 0$ genügen, die für λ die Bedingungsgleichung ergibt:

$$\Phi_{uu} + 2\lambda\Phi_{uv} + \lambda^2\Phi_{vv} = 0.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$\lambda' = \frac{-\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{vv}}; \; \lambda'' = \frac{-\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{vv}}.$$

Danach ist also wegen (7):

$$\Phi_{uw} = \Phi_{uu} + \lambda'\Phi_{uv}$$
$$\Phi_{vw} = \Phi_{uv} + \lambda'\Phi_{vv}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\Phi_{uw} = -\sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}} \; \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{vv}},$$

$$\Phi_{vw} = -\sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}.$$

Also folgt:

$$\frac{\Phi_{uw}}{\Phi_{vw}} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{vv}} \quad \text{und ebenso:}$$

$$\frac{\Phi_{ut}}{\Phi_{vt}} = \frac{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{vv}}.$$

Daher ist nach (6):

$$\frac{\sin \widehat{uw}}{\sin \widehat{vw}} : \frac{\sin \widehat{ut}}{\sin \widehat{vt}} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}, \text{ also nach (3)} \tag{8}$$
$$= e^{2i\varphi}.$$

Hieraus ergibt sich für φ in Übereinstimmung mit (3):

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2i} \ln \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}} \\ &= \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{\sin \widehat{uw}}{\sin \widehat{vw}} : \frac{\sin \widehat{ut}}{\sin \widehat{vt}} \right) \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Mit Formel (8) haben wir also folgenden Satz gefunden:

Satz VII. *Der Winkel zweier Kugeln u und v ist der mit einem konstanten Faktor multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das diese beiden Kugeln mit den beiden gemeinschaftlichen Punktkugeln auf ihrer Schnittlinie bilden.*

In der Abbildung entsprechen den Kugeln u und v zwei Ebenen, den Punktkugeln w und t ihrer Schnittlinie entsprechen die beiden Tangentialebenen, die sich durch die Schnittgerade $\overline{uv}$ an die Absolute legen lassen. Folglich lautet unser Satz jetzt:

Satz VII. *In der Abbildung des Gebüsches auf den Punktraum wird je zwei Ebenen von R eine winkelartige Größe zugeordnet, die gleich dem mit einem konstanten Faktor multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses ist, das diese beiden Ebenen mit den Tangentialebenen bilden, die sich durch die Schnittgerade $\overline{uv}$ an die Absolute legen lassen. Das ist aber einfach der „Winkel" der Cayley'schen Maßbestimmung:*

$$\varphi = ik' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}$$

bezogen auf $F_{xx} = 0$ als Absolute.

§ 7.

Streckenmessung.

1. Während ein inverses Punktepaar des Gebüsches durch Angabe seiner homogenen Variabeln $x_1, x_2; x_3, x_4$ eindeutig festgelegt ist, ist nach § 1 zur Bestimmung eines einzelnen Punktes dieses Paares noch die Angabe des Proportionalitätsfaktors ω nötig, der als Funktion von x mit $\omega(x)$ bezeichnet werden möge; $\omega(x)$ ist eine Wurzel der Gleichung 2. Grades

(1) $$\omega^2 M_{xx} - \omega\,(abcx)\,\triangle + p\triangle^2 = 0,$$

die andere Wurzel kommt für den inversen Punkt in Betracht.

Haben wir nun irgend zwei *schlichte* Punkte (im Gegensatz zu den Punktepaaren)

$$x = P\,\{x', y', z'\} \text{ und } y = Q\,\{x'', y'', z''\},$$

so können wir ihren Abstand

(2) $$\begin{aligned}\overline{xy}^2 &= (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2\\ &= s' + s'' - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'')\end{aligned}$$

mittels der Transformationsformeln § 1, (8) sofort berechnen, indem wir für x etwa die tetrasphärischen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und für y die Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 annehmen. Wir gelangen dann schließlich zu dem Resultat:

(3) $$\overline{xy}^2 = \frac{\omega(x)\,\omega(y)}{2p\triangle^2}\left(F_{xy} - \sqrt{F_{xx}\,F_{yy}}\right).$$

Denn nach § 2, 3 ist:

$$\alpha)\ F_{xx} = \frac{\triangle^2\,(s-p)^2}{[\omega(x)]^2}.$$

Also folgt hieraus sofort:

$$\sqrt{F_{xx}\,F_{yy}} = \frac{\triangle^2}{\omega(x)\,\omega(y)}\,(s'-p)\,(s''-p)$$

$$= \frac{\triangle^2}{\omega(x)\,\omega(y)}\,[s's'' - (s'+s'')p + p^2].$$

Für F_{xy} hatten wir in § 5, (5) erhalten:

$$F_{xy} = (abcx)\,(abcy) - 4p\,[(abdx)\,(abdy) + (bcdx)\,(bcdy) + (cadx)\,(cady)].$$

Hieraus ergibt sich dann (mittels der Fransformations-formeln):

$$\beta)\ F_{xy} = \frac{\triangle^2}{\omega(x)\,\omega(y)}\,(s'+p)\,(s''+p) - \frac{4p\triangle^2}{\omega(x)\,\omega(y)}\,(x'x''+y'y''+z'z'')$$

$$= \frac{\triangle^2}{\omega(x)\,\omega(y)}\,[s's''+(s'+s'')\,p+p^2-4p(x'x''+y'y''+z'z'')].$$

Daher ist in der Tat wegen (2)

$$(3)\qquad \overline{xy}^2 = \frac{\omega(x)\,\omega(y)}{2p\triangle^2}\left(F_{xy} - \sqrt{F_{xx}F_{yy}}\right)$$

der Abstand der Punkte x, y, bezw. der zu ihnen inversen Punkte, je nachdem wir für $\omega(x)$, $\omega(y)$ den einen oder andern Wurzelwert der Gleichung (1) nehmen.

2. Um nun diesen Abstand in projektivem Maße auszudrücken, zugleich auch in der Hoffnung, die zweideutigen Faktoren $\omega(x)$, $\omega(y)$ herauszubekommen, nehmen wir wieder analog dem Vorgang der Winkelmessung zwei weitere schlichte Punkte ξ, η hinzu; aus (3) erhalten wir dann das Doppelverhältnis:

$$(4)\qquad \left(\frac{\overline{\xi x}}{\overline{\xi y}} : \frac{\overline{\eta x}}{\overline{\eta y}}\right)^2 = \frac{F_{\xi x} - \sqrt{F_{\xi\xi}F_{xx}}}{F_{\xi y} - \sqrt{F_{\xi\xi}F_{yy}}} : \frac{F_{\eta x} - \sqrt{F_{\eta\eta}F_{xx}}}{F_{\eta y} - \sqrt{F_{\eta\eta}F_{yy}}}.$$

Wir nehmen jetzt ξ, η als „Schnittelemente" des im Gebüsche durch x und y gehenden Kreises $\widehat{xy}$ mit $F_{xx} = 0$ an. Dann ist:

$$F_{\xi\xi} = 0;\ F_{\eta\eta} = 0.$$

Aus (4) wird also:

$$(5)\qquad \left(\frac{\overline{\xi x}}{\overline{\xi y}} : \frac{\overline{\eta x}}{\overline{\eta y}}\right)^2 = \frac{F_{\xi x}}{F_{\xi y}} : \frac{F_{\eta x}}{F_{\eta y}}.$$

Ferner sind ξ_i und η_i, da die Punkte ξ und η auf dem Verbindungskreis $\widehat{xy}$ liegen, von der Form:

(6) $$\xi_i = x_i + \lambda' y_i;\ \eta_i = x_i + \lambda'' y_i,$$

wo λ', λ'' wegen $F_{\xi\xi} = 0$ und $F_{\eta\eta} = 0$ der Gleichung genügen:

$$F_{xx} + 2\lambda F_{xy} + \lambda^2 F_{yy} = 0.$$

Also ist:

$$\lambda' = \frac{-F_{xy} - \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{yy}};\ \lambda'' = \frac{-F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{yy}}.$$

Aus (6) folgt ferner:

(7) $$F_{\xi x} = F_{xx} + \lambda' F_{xy};\ F_{\xi y} = F_{xy} + \lambda' F_{yy}.$$

Also ist:

(8) $$\begin{cases} F_{\xi x} = -\sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}} \cdot \dfrac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{yy}} \\ F_{\xi y} = -\sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}, \end{cases}$$

und es verhält sich:

$$\frac{F_{\xi x}}{F_{\xi y}} = \frac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{yy}};\ \frac{F_{\eta x}}{F_{\eta y}} = \frac{F_{xy} - \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{yy}}$$

daher nach (5):

(9) $$\left(\frac{\xi x}{\xi y} : \frac{\eta x}{\eta y}\right)^2 = \frac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}.$$

Das Doppelverhältnis der Abstände von vier schlichten Punkten x, y, ξ, η ist demnach gegenüber der Inversion des Gebüsches eine Invariante, denn es ändert sich nicht, wenn man die Punkte durch ihre inversen ersetzt. Das Doppelverhältnis ist also eine Invariante der vier durch die x_i, y_i, ξ_i, η_i festgelegten Punkte*paare* (x), (y), $(\xi) = \xi$, $(\eta) = \eta$. (Vergl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie, Bd. II, § 11, 8.)

3. Diese Formel bildet noch nicht das vollkommene Analogon zur projektiven Darstellung des Winkels. Denn

für den Winkel zweier Kugeln u und v hatten wir unmittelbar erhalten (§ 6, (8)):

$$\varphi = \frac{1}{2\,i}\, ln \left(\frac{sin\, \widehat{xw}}{sin\, \widehat{vw}} : \frac{sin\, \widehat{ut}}{sin\, \widehat{vt}} \right) = \frac{1}{2\,i}\, ln \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}.$$

Wir erwarten also für den Abstand zweier Punkte ebenfalls eine Größe, die sich ähnlich projektiv verhält wie der Winkel, d. h. sich unmittelbar durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses darstellen läßt. Es müßte dies eine zu φ polar gebildete Größe d sein:

$$d = \frac{1}{2\,i}\, ln \frac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}}.$$

Hierin werden (x) und (y) die Punktepaare, denen die abstandähnliche Bildung d zugeordnet wird — der gewöhnliche Abstand $\overline{xy}$ kann dies natürlich nicht sein —, ξ und η bedeuten die Punkte, in denen der Verbindungskreis $\widehat{xy}$ die Orthogonalkugel trifft, so daß also nach (9) d mit den gewöhnlichen Abständen $\overline{x\xi}$, $\overline{x\eta}$ usw. in der Beziehung steht:

$$(10) \quad e^{2id} = \frac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}} = \left(\frac{\overline{\xi x}}{\overline{\xi y}} : \frac{\overline{\eta x}}{\overline{\eta y}} \right)^2,$$

also

$$d = \frac{1}{i}\, ln \left(\frac{\overline{\xi x}}{\overline{\xi y}} : \frac{\overline{\eta x}}{\overline{\eta y}} \right).$$

Die wahre, d. h. geometrische Bedeutung von d erhalten wir, wenn wir zu den Punktepaaren (x), (y), deren „Abstand" d ist, die Polaren (u) und (v) konstruieren. Denn sind nach § 5, (6) die Flächenkoordinaten dieser Polaren:

$$u_i = F_{xi}; \quad v_i = F_{yi},$$

so ist nach § 4, (10):

$$\Phi_{uu} = -4p\triangle^2 F_{xx}; \quad \Phi_{vv} = -4p\triangle^2 F_{yy}.$$

Setzen wir diese Werte von F_{xx}, F_{yy} in (10) ein, so ergibt sich:

$$(11)\quad e^{2id} = \frac{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} + \sqrt{F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy}}} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}$$

$$= e^{2i\varphi} \text{ nach § 6, (8),}$$

worin φ den Winkel zwischen u und v bedeutet. Bis auf ganze Vielfache von π ist daher

$$d = \varphi,$$

denn es folgt aus (11), da $e^{2i\pi} = 1$:

$$d = \varphi + n \cdot \pi.$$

Wir haben somit den Satz:

Satz VIII. *Die abstandartige, sich projektiv verhaltende Größe $d = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{\overline{\xi x}}{\xi y} : \frac{\overline{\eta x}}{\eta y} \right)$, die wir zwei Punktepaaren (x) und (y) zuordnen, ist nichts anderes als der Winkel zwischen den Polaren u und v dieser Punktepaare.*

Greifen wir zur Abbildung des Gebüsches auf den Raum zurück, so sehen wir die streckenartige Bildungen d sind genau die Strecken der Cayley'schen Metrik.

4. Satz VIII gibt Veranlassung auf den geometrischen Zusammenhang und die Realitätsverhältnisse von Pol und Polaren nochmals genauer einzugehen. Nach § 5, (9) war, wenn u die Polare von (x) bezüglich $F_{xx} = 0$ war,

$$(12)\qquad \Phi_{uw} = -4p \triangle w_x.$$

Geht nun w durch (x), so folgt nach Satz V:

$$w_x = 0,$$

folglich auch (13) $\qquad \Phi_{uw} = 0,$

und dies ist nach § 6, 1 die Bedingung der Orthogonalität der beiden Kugeln u und w. Wir erhalten also den Satz:

Satz IX. *Alle Kugeln w des Gebüsches, die durch den Pol (x) von u gehen, schneiden u rechtwinkelig.*

Im elliptischen Gebüsch Ω schneiden nun alle durch den Pol (x) von u gehenden Kugeln w die Kugel u rechtwinkelig, müssen also einem hyperbolischen Gebüsch angehören; gleichzeitig gehören sie aber auch dem elliptischen Gebüsch Ω an. Die Gesamtheit der Kugeln w bildet also ein Bündel, dessen beide Grundpunkte eben den Pol bilden. Dieses Bündel hat wie alle im elliptischen Gebüsch enthaltenen Bündel mit seiner Potenzachse zwei reelle Schnittpunkte gemeinschaftlich, *wir erhalten also im elliptischen Gebüsch einen reellen Pol.*

Im Gegensatz dazu ergibt im hyperbolischen Gebüsch die Gesamtheit der Kugeln w ein hyperbolisches Kugelbündel, das mit seiner Potenzachse zwei imaginäre Schnittpunkte gemein hat. Diese konstituieren den Pol. Wir erhalten also als zusammenfassenden Satz:

Satz X. *Jede reelle Kugel besitzt im elliptischen Gebüsch ein reelles Polpaar, im hyperbolischen hingegen ein imaginäres.*

5. Von besonderem Interesse ist nun noch die Trigonometrie des elliptischen Gebüsches. Wie wir im dreidimensionalen Raum die Begriffe von Pol und Polare gebildet haben, so können wir auch im zweidimensionalen Raum, d. h. auf den Ebenen und Kugeln des Gebüsches die Kreise und Punktepaare in die Beziehung von Pol und Polare setzen. Die Kreise durch den Pol schneiden den gegebenen Kreis rechtwinkelig. Nehmen wir nun speziell einen Kreis auf einer Kugel des Gebüsches an, so findet man den Pol, indem man in dem Mittelpunkt des Kreises auf seiner Ebene das Lot errichtet. Die Schnittpunkte desselben mit der

Kugel konstituieren den Pol. Nun gilt aber in der sphärischen Metrik das Grundgesetz (vergl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie Bd. II § 9, 13), daß der sphärische Abstand zweier Punkte gleich ist dem Winkel ihrer Polaren. Dies führt uns zu dem Satz:

Satz XI. *Die abstandartige Größe d, die wir soeben definiert haben, ist der Abstand im Sinne der sphärischen Trigonometrie, wenn wir speziell die Diametralkugel des Gebüsches betrachten.*

6. Wir müssen es uns versagen, näher auf die Trigonometrie einzugehen, obwohl sie an sich durch ihre Beziehung zur Nichteuklidischen Geometrie sehr interessant wäre. Dagegen liegt es uns noch ob, das Koordinatensystem selber geometrisch eingehender zu untersuchen und ihm eine anschauliche Bedeutung zu geben.

§ 8.

Einführung statischer Punktkoordinaten z_1, z_2, z_3 von inversen Punktepaaren in der Ebene.

1. In § 1 haben wir den Begriff der anallagmatischen Punktkoordinaten für beliebige Punktepaare im Raum definiert. Um uns nun durch Zeichnung ein anschauliches Bild der geometrischen Eigenschaften dieser Koordinaten machen zu können, wollen wir der Einfachheit halber zunächst nur den Fall berücksichtigen, daß die durch die homogenen x_i festgelegten inversen Punktepaare sämtlich in der xy-Ebene liegen. An die Stelle des durch die vier Kugeln $x_i = 0$ $(i=1, 2, 3, 4)$ gebildeten Kugelgebüsches Ω wird also ein durch drei Kreise $x_i = 0$ $(i=1, 2, 3)$ erzeugtes Kreisbündel treten, dessen Potenzzentrum wieder zum Koordinatenanfangspunkt gewählt wird. Die Gleichungen aller zum Bündel gehörigen

Kreise sind dann nach § 1, (6) von der Form, indem $z=0$ gesetzt wird:

(1) $$x_i = a_i x + b_i y + d_i (s + p) = 0,$$

wo $s = x^2 + y^2$ ist.

2. Wir wollen nun vorläufig noch nicht x_1, x_2, x_3 als selbständige Koordinatengrößen eines inversen Punktepaares $P=(P', P'')$ verwerten, sondern erst ein System statischer Koordinaten z_1, z_2, z_3 einführen und dann die Gleichwertigkeit beider Systeme der z_i und der x_i beweisen. Wir geben uns also jetzt ein beliebiges Kreisbündel, z. B. ein hyperbolisches, dessen Grundkreise $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ sich in den inversen Punktepaaren $A_1=(A_1', A_1'')$, $A_2=(A_2', A_2'')$, $A_3=(A_3', A_3'')$ schneiden mögen, und nehmen auf den Geraden OA_1, OA_2, OA_3 drei in A_1' A_2' A_3' angreifende Kräfte z_1, z_2, z_3 an, die in der einen — willkürlich festzulegenden — Richtung positiv, in der anderen negativ gemessen werden. Diese drei Kräfte haben dann eine bestimmte Resultante R, deren Angriffslinie gleichfalls durch O geht, und dieser Resultanten ordnen wir in der folgenden eindeutigen Weise ein Punktepaar $P=(P', P'')$ als „Angriffspunkt" zu (s. Fig. 1):

3. Wir vereinigen zuerst zwei Kräfte z_i zu einer Resultierenden, z. B. die an A_1' und A_2' angreifenden Kräfte z_1 und z_2 zu der Resultierenden s_3 und nennen

> *„Angriffspunkt" von s_3 dasjenige inverse Punktepaar $S_3=(S_3', S_3'')$, in welchem die Angriffslinie von s_3 von demjenigen Kreis des Bündels geschnitten wird, der durch die Angriffspunkte A_1', A_2' ihrer Komponenten geht.*

Vereinigen wir daher weiter s_3 und z_3 zu R, der Gesamtresultierenden des Kräftetripels z_1, z_2, z_3, so gilt ebenso als „Angriffspunkt" von R dasjenige inverse Punktepaar $P=(P', P'')$, in welchem die Angriffslinie von R vom Kreis σ_3

des Bündels geschnitten wird, der durch die Punktepaare S_3 und A_3' geht.

4. Daß diese Zuordnung der Punktepaare P zu einem Kräftetripel z_1, z_2, z_3 eindeutig ist, erhellt daraus, daß man immer dasselbe Punktepaar P erhält, in welcher Reihenfolge man auch die Vereinigung der Kräfte z_i vornimmt; es schneiden sich nämlich in $P=(P', P'')$ alle drei Kreise $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ des Bündels, die für P in Betracht kommen können. Der Beweis hierfür wird noch an späterer Stelle geführt werden. Hieraus folgt dann auch, daß die Zuordnung der Punktepaare immer dieselbe bleibt, wenn man statt des Dreiecks A_1', A_2', A_3' das dazu inverse Dreieck A_1'', A_2'', A_3'' als Kordinatendreieck benützt.

5. Nimmt man nun statt z_1, z_2, z_3 die Kräfte nz_1, nz_2, nz_3, so wird ihre Resultierende $n.R$. Die Angriffslinie der Kraft nR bleibt ungeändert, folglich auch ihr „Angriffspunkt" $P=(P', P'')$. Die Koordinatentripel z_1, z_2, z_3 und nz_1, nz_2, nz_3 bestimmen also dasselbe Punktepaar d. h.

> *Diese Koordinaten sind homogen, nicht ihre absoluten Werte legen das Punktepaar fest, sondern ihre Verhältnisse* $z_1 : z_2 : z_3$.

6. Wenn daher die umgekehrte Aufgabe vorliegt, zu einem Punktepaare $P=(P', P'')$ die zugehörigen Koordinaten z_1, z_2, z_3 zu finden, so können wir auf OP eine Kraft R, deren Angriffspunkt P sein soll, der Größe nach willkürlich annehmen und dann dieselbe in die drei Komponenten z_1, z_2, z_3 zerlegen, deren Angriffspunkte und Angriffslinien von vorneherein gegeben sind. Hätten wir $n.R$ statt R genommen, so wären die drei Komponenten nz_1, nz_2, nz_3 geworden. Wir sehen also:

Satz XII. *Die Verhältnisse $z_1 : z_2 : z_3$ bestimmen nicht nur eindeutig ein Punktepaar $P = (P', P'')$, sondern umgekehrt legt auch jedes Punktepaar eindeutig die Verhältnisse $z_1 : z_2 : z_3$ fest. Diese bis auf einen gemeinschaftlichen Proportionalitätsfaktor n bestimmt gedachten Größen z_1, z_2, z_3 nennen wir daher die Punktkoordinaten des Punktepaares.*

7. Einer eingehenderen Betrachtung wollen wir nun noch den Fall unterziehen, daß die Kreise $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ kein reelles Schnittdreieck bilden. Denn dann erscheint es auf den ersten Blick zweifelhaft, ob die Konstruktion des Punktepaares P ohne Einschränkung durchführbar ist. Der in dieser Hinsicht schlimmste Fall, nämlich, daß wir weder reelle Dreieckspunkte A_1, A_2, A_3 noch reelle Angriffspunkte S_1, S_2, S_3 erhalten, ist in Figur 2 vorliegend gedacht. Dann sind gleichwohl die Angriffslinien $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$ der Kräfte z sofort festgelegt durch die drei Potenzlinien der gegebenen Kreise. Die Angriffslinien von s_1, s_2, s_3 sind an sich gegeben durch die Zusammensetzung je zweier Kräfte z_i. Daraus folgt, es lassen sich allemal auch die Kreise σ_1, σ_2, σ_3 konstruieren, deren Schnittpunkt $P = (P', P'')$ der „Angriffspunkt" der Resultierenden R ist.

8. Um z. B. den Kreis σ_3 zu finden, der nach 3 durch die Punktepaare $S_3 = (S_3', S_3'')$ und $A_3 = (A_3', A_3'')$ gehen müßte, hat man jetzt denjenigen Kreis zu suchen, der — genau wie in 3. — mit $x_3 = 0$ die Gerade OS_3 zur gemeinsamen Potenzlinie hat und ferner durch den in diesem Fall imaginären Schnittpunkt von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ geht. In andern Worten, man hat einen Kreis zu suchen, der gleichzeitig zwei gegebenen Kreisbüscheln angehört. Das Zentrum eines solchen Kreises liegt also im Schnittpunkte der Zen-

tralen beider Büschel und sein Radius ist die vom Zentrum an den Orthogonalkreis des Bündels gezogene Tangente.

9. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind demnach immer reelle Kreise, die sich im allgemeinen auch in reellen Punkten schneiden werden, solange nicht eine Kraft z_γ unverhältnismäßig groß oder klein angenommen wird gegenüber den beiden andern Kräften z_α, z_β. Läßt man z. B. im Falle der Figur 2. bei festgehaltenem z_1 und z_2 die Kraft z_3 wachsen und schließlich gegen ∞ konvergieren, so wird die Resultierende R, den Kreis σ_3, der seiner Größe und Lage nach sich nicht ändert, in einer gewissen Grenzlage, nämlich auf dem Orthogonalkreis erst berühren und dann nicht mehr schneiden, während die beiden Kreise σ_1 und σ_2 sich mehr und mehr verkleinern, bis sie mit $z_3 = \infty$ ihre Grenzlage $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$ erreicht haben. Ebenso erhalten wir kein reelles Punktepaar $P = (P', P'')$, wenn z_3 gegen null konvergiert, indem dann R sich s_3 nähert. Es liegt also beide Male, sowohl für $z_3 = \infty$, als auch für $z_3 = 0$, der in § 2 definierte Fall des „idealen" Punktepaares vor. Als Analogie des dort aufgestellten Satzes können wir daher auch hier den Satz aussprechen.

Satz XIII. *Zu reellen z_i erhalten wir immer reelle oder ideale Punktepaare.*

10. Hervorgehoben sei schließlich noch, daß sich die Konstruktion der Punktepaare P überraschend einfach gestaltet, wenn wir uns das Kreisbündel aus der xy-Ebene verlegt denken auf die Oberfläche einer Kugel, d. h. wenn wir uns die das Bündel erzeugenden Kreise x_1, x_2, x_3 entstanden denken als Schnittflächen eines Ebenenbündels, dessen Mittelpunkt in O liegt, mit einer Kugel, die in O die Potenz p besitzt. Dann erhält man nämlich das Punktepaar P sofort, indem man die Resultierende R des Kräftetripels z_1, z_2, z_3 mit der Kugeloberfläche zum Schnitt bringt.

11. Wie Figur 3 zeigt, ist die in 3 angegebene Konstruktion der Punktepaare ohne weiteres auch im ellipschen Kreisbündel anwendbar. Man hat auch dort die Wahl, welches der entstehenden Schnittdreiecke man zum Koordinatendreieck machen will.

§ 9.

Gleichwertigkeit des Koordinatensystems der z_i mit dem System der x_i. Übertragung auf den Raum.

1. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, insbesondere Satz XIII, lassen bereits den noch zu ermittelnden Zusammenhang der z_i mit den x_i ahnen. Wir finden denselben gleichzeitig mit dem Beweis dafür, daß sich die Kreise $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in einem und demselben Punktepaar $P = (P', P'')$ schneiden und wollen daher die Gleichungen dieser Kreise $\sigma_i = 0$ aufstellen und zwar zunächst die Gleichung von σ_3. Die Grundkreise x_i sind nach § 8, (1) von der Form:

(1) $$x_i = a_i x + b_i y + d_i (s + p) = 0, \text{ für } s = x^2 + y^2.$$

Nach § 3, (1) ist nun:

(2) $$u_x d_v - v_x d_u = 0$$

die Gleichung der Potenzebene der Kugeln $u_x = 0, v_x = 0$. Entsprechendes gilt in der Ebene von der Potenzlinie zweier Kreise, speziell ist:

(3) $$(xd)_i = x(ad)_i + y(bd)_i = 0$$

die Potenzlinie OA_i.

Der Kreis σ_3 hat, da er zum Büschel x_1, x_2 gehört, eine Gleichung von der Form:

(4) $$\lambda x_1 - \varkappa x_2 = 0.$$

Die Potenzlinie dieses Kreises mit $x_3 = 0$ ist dann nach (2):

$$(\lambda x_1 - \varkappa x_2)\, d_3 - (\lambda d_1 - \varkappa d_2)\, x_3 = 0 \quad \text{oder}$$

(5) $$\varkappa (xd)_1 + \lambda (xd)_2 = 0.$$

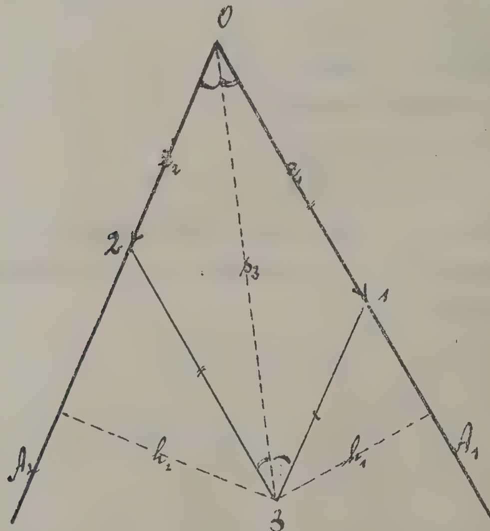
Der hieraus zu entnehmende Wert $\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right)$ hängt mit dem Verhältnis $\frac{h_1}{h_2}$ der Abstände eines Punktes der Geraden OS_3 von den Strahlen OA_1 und OA_2 zusammen. Bringen wir nämlich in (3) die Gleichungen von OA_1 und OA_2 in die Hesse'sche Normalform, so ist :

$$(6) \qquad \frac{(xd)_1}{+\sqrt{(ad)_1^2+(bd)_1^2}} = h_1 ; \frac{(xd)_2}{+\sqrt{(ad)_2^2+(bd)_2^2}} = h_2,$$

also :

$$(7) \qquad -\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{(xd)_1}{(xd)_2} = -\frac{h_1\sqrt{(ad)_1^2+(bd)_1^2}}{h_2\sqrt{(ad)_2^2+(bd)_2^2}}.$$

Mit Formel (7) haben wir den gewünschten Anschluß an die z_i gewonnen; denn in dem Kräfteparallelogramm $O132$ verhält sich :



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sin \widehat{32}}{\sin \widehat{31}} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Folglich ergibt sich aus (7):

$$-\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{z_2\sqrt{(ad)_1^2+(bd)_1^2}}{z_1\sqrt{(ad)_2^2+(bd)_2^2}}$$

und hieraus mit Unterdrückung eines gemeinsamen Faktors:

$$\varkappa = \frac{z_1}{\sqrt{(ad)_1^2+(bd)_1^2}} = \zeta_1$$

$$\lambda = \frac{z_2}{\sqrt{(ad)_2^2+(bd)_2^2}} = \zeta_2.$$

Die Gleichung für σ_3 lautet demnach endgültig:

(8) $$\sigma_3 \equiv x_1\zeta_2 - x_2\zeta_1 = 0.$$

Analog können wir also schließen:

$$\sigma_2 \equiv x_3\zeta_1 - x_1\zeta_3 = 0$$

$$\sigma_1 \equiv x_2\zeta_3 - x_3\zeta_2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x_1}{\zeta_1} = \frac{x_2}{\zeta_2} = \frac{x_3}{\zeta_3},$$

d. h. *die drei Kreise* $\sigma_i = 0$ *treffen sich im Punktepaar*

$$x_1 = \zeta_1 : \; x_2 = \zeta_2 : \; x_3 = \zeta_3.$$

Es ist also:

$$x_1 = \frac{z_1}{\sqrt{(ad)_1^2+(bd)_1^2}};\; x_2 = \frac{z_2}{\sqrt{(ad)_2^2+(bd)_2^2}};\; x_3 = \frac{z_3}{\sqrt{(ad)_3^2+(bd)_2^2}}.$$

2. Leicht zu ersehen ist nun, daß der gemeinsame Schnittpunkt dieser drei Kreise $\sigma_i = 0$, deren Gleichungen (8) wir aus ihrer geometrischen Konstruktion abgeleitet haben, auch wirklich auf R zu liegen kommt. Denn angenommen, es schnitte zunächst nur $\sigma_3 = 0$ die Resultierende R im Punktepaare $P = (P', P'')$, dann müssen sich durch P noch zwei weitere Kreise σ_1' und σ_2' legen lassen, die resp. durch die Punktepaare $A_1 = (A_1', A_1'')$ und $A_2 = (A_2', A_2'')$ hindurchgehen, und es gilt die Beziehung für P:

$$\frac{x_1}{\zeta_1'} = \frac{x_2}{\zeta_2'} = \frac{x_3}{\zeta_3'}.$$

Daneben bleibt für den Schnittpunkt der Kreise $\sigma_i = 0$ die Relation bestehen:

$$\frac{x_1}{\zeta_1} = \frac{x_2}{\zeta_2} = \frac{x_3}{\zeta_3}.$$

Hieraus folgt:

$$\zeta_1' : \zeta_2' : \zeta_3' = \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3$$

d. h. $\zeta_i' = k\zeta_i$, folglich:

$$\sigma'_i = k\sigma_i$$

$$\textit{also Kreis } \sigma_i' \equiv \sigma_i.$$

3. Punkt O hat also die Koordinaten:

1) in x, y $\quad 0, 0$
2) in x_1, x_2, x_3 $\quad x_i = pd_i$
3) in z_1, z_2, z_3 $\quad z_i = pd_i \sqrt{(ad)_i^2 + (bd)_i^2}.$

Man kann nun über die Größen d_1, d_2, d_3, deren Beibehaltung als Koeffizienten von $s = x^2 + y^2$ sich damit zugleich rechtfertigt, so verfügen, daß die Faktoren

$$\sqrt{(ad)_i^2 + (bd)_i^2} = \mu$$

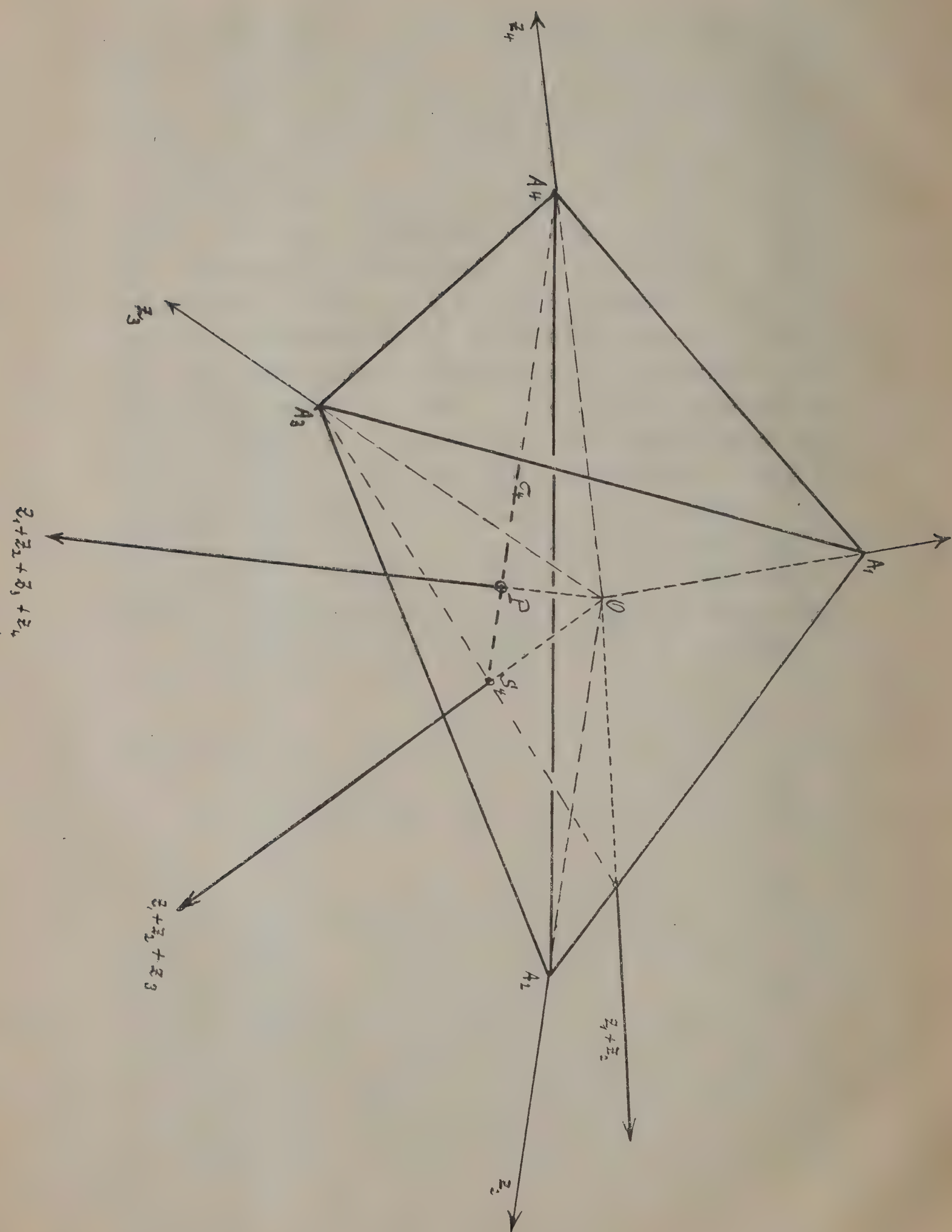
werden; wir haben dann den Satz:

Satz XIV. *Die homogenen Punktkoordinaten z_1, z_2, z_3 von Punktepaaren in der Ebene sind bis auf einen gemeinsamen Faktor μ gleich x_1, x_2, x_3.*

In einem Kreisbündel, für welches $\mu = 1$ wird, folgt $z_i \equiv x_i$.

4. Die Konstruktion inverser Punktepaare in der Ebene mittels statischer Koordinaten legt eine entsprechende Verallgemeinerung für den Raum sofort nahe. Die vier das Gebüsch erzeugenden Grundkugeln $x_i = 0$ schneiden sich nämlich zu je dreien in vier Punktepaaren A_1, A_2, A_3, A_4, die im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, sondern die Eckpunkte inverser Tetraeder bilden. Eines derselben können wir zum Koordinatentetraeder wählen. Wir können nämlich

in A_1, A_2, A_3, A_4 vier Kräfte z_1, z_2, z_3, z_4 anbringen, deren Angriffslinien sämtlich durch O gehen, und haben dann diesem Kräftequadrupel ein Paar inverser Punkte in eindeutiger Weise als „Angriffspunkt" zuzuordnen. Wir werden daher zunächst drei Kräfte $z_\alpha, z_\beta, z_\gamma$ nach § 8,3 zu einer Resultierenden s_δ vereinigen ($\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ ist eine Permutation von 1 2 3 4) und auf ihrer Angriffslinie das Paar inverser Punkte $S_\delta = (S_\delta', S_\delta'')$ als Angriffspunkt bestimmen. Das gesuchte Punktepaar $P = (P', P'')$ ist dann auf demjenigen Kreis σ_δ zu suchen, der durch den Tetraederpunkt A_δ und das Punktepaar S_δ hindurchgeht (Beifolgende Figur ist schematisch aufzufassen; an Stelle der Kreise, auf welche die Angriffspunkte zu liegen kommen, sind gerade Linien gezogen). Zu beweisen bliebe nun, daß diese Konstruktion der Punktepaare P eindeutig ist, d. h. daß sich analog wie in der Ebene die Kreise $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ in einem und demselben Punktepaar $P = (P', P'')$ auf R schneiden. Indessen, da hierfür ein bequemer, leicht zu überblickender Beweis nicht geglückt ist, wollen wir nicht weiter darauf eingehen.


A4
A3
A1
A2
O
P

§ 10.

Invarianz der anallagmatischen Koordinaten gegenüber einer beliebigen Inversion des Gebüsches.

1. Durch die Untersuchungen § 9 hat sich bereits herausgestellt, daß sich der Zusammenhang der statischen Koordinaten z_1, z_2, z_3 mit den anallagmatischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 zurückführen läßt auf eine gewisse geometrische Abhängigkeit der Kreise σ_i, in deren gemeinsamen Schnittpunkten auf R eben das inverse Punktepaar $P = (P', P'')$ zu liegen kam, von den drei Grundkreisen $x_i = 0$ des Bündels. Die Art dieser geometrischen Abhängigkeit ergibt sich aus der Form der Gleichungen (8). So ist z. B.

$$\sigma_3 \equiv x_1 \zeta_2 - x_2 \zeta_1 = 0 \tag{1}$$

zunächst nur der analytische Ausdruck dafür, daß der Kreis $\sigma_3 = 0$ dem von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gebildeten Kreisbüschel angehört. Hieraus ergibt sich aber sofort die geometrische Folgerung:

Jeder Punkt von $\sigma_3 = 0$ hat in bezug auf die Kreise $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ konstantes Potenzverhältnis.

Ein beliebiger Punkt p hat nämlich in bezug auf x_1 die Potenz $x_1^p = \frac{x_1}{d_1}$, *) und derselbe Punkt p hat in bezug auf x_2 die Potenz $x_2^p = \frac{x_2}{d_2}$, folglich ist wegen (1)

$$x_1^p : x_2^p = \frac{\zeta_1}{d_1} : \frac{\zeta_2}{d_2} = \alpha_1 : \alpha_2 = const., \tag{2}$$

$$\text{wo} \quad \alpha_i = \frac{z_i}{d_i \sqrt{(ad)_i^2 + (bd)_i^2}} \text{ ist}, \quad (i = 1, 2).$$

---

*) Nach § 3, (2).

Dieses Resultat können wir in die Form eines allgemein gültigen und übrigens bekannten Satzes kleiden:

Satz XV. *Jeder Punkt eines Kreises, der einem von zwei andern Kreisen gebildeten Büschel angehört, hat in bezug auf diese beiden Kreise konstantes Potenzverhältnis.*

Der Satz gilt auch umgekehrt.

2. Denken wir uns nun das Punktepaar P zunächst nur im Schnitt von $\sigma_3 = 0$ und $\sigma_2 = 0$, so gelten also die beiden Gleichungen:

$$x_1^P : x_2^P = \frac{x_1}{d_1} : \frac{x_2}{d_2} = \alpha_1 : \alpha_2$$

$$x^P : x_3^P = \frac{x_1}{d_1} : \frac{x_3}{d_3} = \alpha_1 : \alpha_3.$$ Hieraus folgt:

$$x_2^P : x_3^P = \frac{x_2}{d_2} : \frac{x_3}{d_3} = \alpha_2 : \alpha_3.$$

Dies ist das Potenzverhältnis aller Punkte von $\sigma_1 = 0$ in bezug auf die Kreise x_2 und x_3 des Bündels, wie es ja auch sein muß, da $\sigma_1 = 0$ gleichfalls durch den Schnitt von σ_3 und σ_2 hindurchgeht. *Das Punktepaar P im Schnitt von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ hat also die Gleichung:*

(3) $$x_1^P : x_2^P : x_3^P = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Wir können demnach jetzt mit völliger Umgehung der statischen Koordinaten z_1, z_2, z_3 ein inverses Punktepaar $P = (P', P'')$ seiner Lage nach festlegen durch seine Potenzverhältnisse in bezug auf die drei Grundkreise des Bündels und daher den allgemein gültigen Satz aufstellen:

Satz XVI. *Jedes inverse Punktepaar eines Kreisbündels ist seiner Lage nach bestimmt durch die Verhältnisse seiner Potenzen in bezug auf die drei Grundkreise des Bündels.*

3. Im Raume erhalten wir als Analogon zu Satz XV sofort: *Der geometrische Ort aller Punkte, die in bezug auf zwei Kugeln ein gegebenes Potenzverhältnis haben, ist eine Kugel durch den Schnitt beider Kugeln.*

Daraus folgt weiter:

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Potenzen in bezug auf drei Kugeln, die nicht demselben Büschel angehören, ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis.
und endlich:

In bezug auf vier voneinander unabhängige Kugeln, d. h. die nicht demselben Bündel angehören, giebt es nur ein einziges inverses Punktepaar des Gebüsches, dessen Potenzen in gegebenem Verhältnis stehen. Damit haben wir das Analogon zu Satz XVI der Ebene:

Satz XVII. { *Jedes inverse Punktepaar eines Kugelgebüsches ist seiner Lage nach bestimmt durch die Verhältnisse seiner Potenzen in bezug auf die vier Grundkugeln des Gebüsches.*

4. Es sei uns nun ein solches inverses Punktepaar $P=(P', P'')$ gegeben durch die Gleichung:

(4) $$x^P : x_2^P : x_3^P : x_4^P = \frac{x_1}{d_1} : \frac{x_2}{d_2} : \frac{x_3}{d_3} : \frac{x_4}{d_4} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4.$$

Dies ist dann nichts anderes als der Schnitt der sechs Kugeln $\Sigma_{ik} = 0$ ($i\,k$ ist eine Kombination zur zweiten Klasse ohne Wiederholung von 1 2 3 4), die durch die Kanten des Schnitttetraeders $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ so gelegt werden, daß:

$$x_i^P : x_k^P = \alpha_i : \alpha_k, \text{ wo } i,\, k = 1, 2, 3, 4.$$
$$i \neq k.$$

Wenn nun überdies die Konstruktion inverser Punktepaare mittels statischer Koordinaten $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ (§ 9, 4) giltig ist, so muß der Schnitt dieser sechs Kugeln $\Sigma_{ik} = 0$ zugleich identisch sein mit dem Schnitt der vier Kreise σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 auf R.

5. Die Gleichung (4) vermittelt uns schließlich noch eine weitere charakteristische Eigenschaft der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. die ihre Benennung „anallagmatisch" nochmals von Grund aus rechtfertigt. Für dasjenige inverse Punktepaar $E = (E', E'')$, für welches

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

ist, den „Einheitspunkt", folgt nämlich:

$$x_1^E : x_2^E : x_3^E : x_4^E = \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3} : \frac{1}{d_4} \tag{5}$$

und hieraus mit Zuhilfenahme von (4):

$$\frac{x_1^P}{x_2^P} : \frac{x_1^E}{x_2^E} = x_1 : x_2 \text{ oder allgemein:} \tag{6}$$

$$\frac{x_1^P}{x_1^E} : \frac{x_2^P}{x_2^E} : \frac{x_3^P}{x_3^E} : \frac{x_4^P}{x_4^E} = x_1 : x_2 : x_3 : x_4. \tag{7}$$

6. Wir invertieren nun das Gebüsch Ω resp. die vier das Gebüsch erzeugenden Kugeln x_i an einer beliebigen Kugel mit dem Radius ρ, so daß

die Kugel $x_i = 0$ invers ist zur Kugel $\mathfrak{x}_i = 0$,
das Punktepaar P invers zum Punktepaar $\mathfrak{P}$,
das Punktepaar E invers zum Punktepaar $\mathfrak{E}$.

Nun läßt sich aber allgemein zeigen:

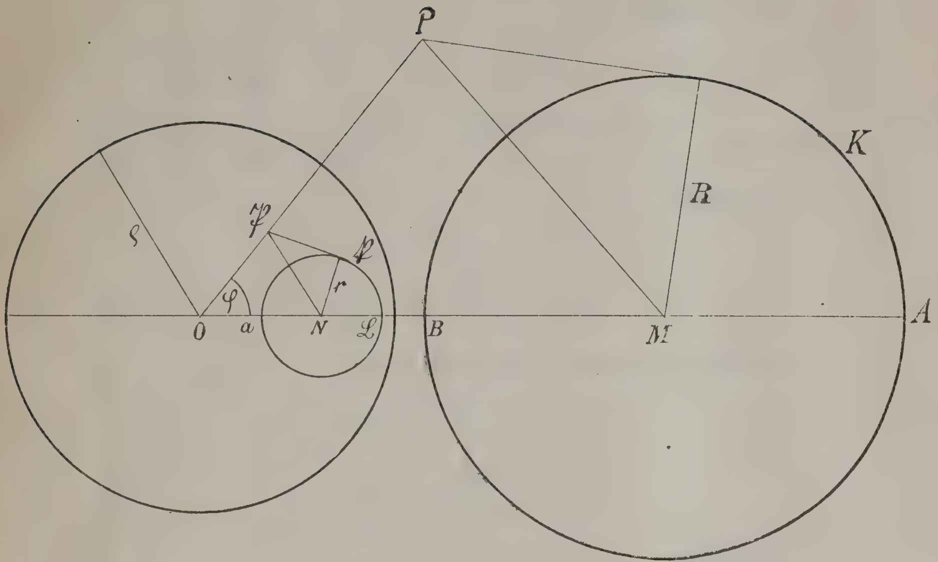
Invertiert man eine Kugel k an einer andern Kugel, deren Zentrum O und deren Radius ρ ist, in die Kugel $\mathfrak{k}$, so gilt für einen beliebigen Punkt P die Beziehung:

$$k^P = \frac{\overline{OP}^2}{\rho^4} \cdot k^O \, \mathfrak{k}^{\mathfrak{P}}.$$

wenn $\mathfrak{P}$ invers ist zu P in bezug auf die Inversionskugel)*
Der Einfachheit halber führen wir den Beweis für einen Kreis k, der in einen andern $\mathfrak{k}$ invertiert wird:

---

*) Vorlesung von Herrn Prof. Dr. Wellstein über Enzyklopädie der Elem. Mathem. Straßburg S. S. 1906.



Es ist: $$k^O = OA \,.\, OB,$$
$$\mathfrak{k}^O = O\mathfrak{A} \,.\, O\mathfrak{B}.$$

folglich: $$k^O . \mathfrak{k}^O = (OA \,.\, O\mathfrak{A}) . (OB \,.\, O\mathfrak{B}) = \rho^2 . \rho^2 = \rho^4.$$

Ferner ist: $$k^P = \overline{PM}^2 - R^2$$
$$= \overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 - 2OP \,.\, OM \cos\varphi - R^2$$
$$= \overline{OP}^2 - 2OP \,.\, OM \cos\varphi + k^O.$$
$$\mathfrak{k}^{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}N}^2 - r^2$$
$$= \overline{O\mathfrak{P}}^2 + \overline{ON}^2 - 2O\mathfrak{P} \,.\, ON \cos\varphi - r^2$$
$$= \overline{O\mathfrak{P}}^2 - 2O\mathfrak{P} \,.\, ON \cos\varphi + \mathfrak{k}^O.$$

In dieser letzteren Gleichung ist nun:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OP}^2 + k^O - k^P}{2OP \,.\, OM}$$

$$\overline{O\mathfrak{P}}^2 = \frac{\rho^4}{\overline{OP}^2}$$

$$\mathfrak{k}^O = \frac{\rho^4}{k^O}$$

Wir erhalten also:

$$\mathfrak{k}^{\mathfrak{P}} = \frac{\rho^4}{\overline{OP}^2} + \frac{\rho^4}{k^O} + (k^P - k^O - \overline{OP}^2)\frac{\rho^2 . ON}{\overline{OP}^2\, OM}$$

hierin ist: $ON = \dfrac{O\mathfrak{A} + O\mathfrak{B}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\rho^2}{OA} + \dfrac{\rho^2}{OB}\right) = \rho^2 \cdot \dfrac{OM}{k^O}.$

Demnach ist:

$$\mathfrak{k}^{\mathfrak{P}} . k^O . \overline{OP}^2 = \rho^4 . k^P$$

$$k^P = \frac{\overline{OP}^2}{\rho^4} . k^O . \mathfrak{k}^{\mathfrak{P}}.$$

Auf Grund dieses Satzes folgt nun:

$$x_1^P = \frac{\overline{OP}^2}{\rho^4} \cdot x_1^O\, \mathfrak{x}_1^{\mathfrak{P}}$$

$$x_2^P = \frac{\overline{OP}^2}{\rho^4} \cdot x_2^O\, \mathfrak{x}_2^{\mathfrak{P}}.$$

Hieraus:

$$\frac{x_1^P}{x_2^P} = \frac{x^O}{x_2^O} \cdot \frac{\mathfrak{x}_1^{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{x}_2^{\mathfrak{P}}} \quad \text{und analog:}$$

$$\frac{x_1^E}{x_2^E} = \frac{x_1^O}{x_2^O} \cdot \frac{\mathfrak{x}_1^{\mathfrak{E}}}{\mathfrak{x}_2^{\mathfrak{E}}}$$

folglich: $\dfrac{x_1^P}{x_2^P} : \dfrac{x_1^E}{x_2^E} = \dfrac{\mathfrak{x}_1^{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{x}_2^{\mathfrak{P}}} : \dfrac{\mathfrak{x}_1^{\mathfrak{E}}}{\mathfrak{x}_2^{\mathfrak{E}}}$ oder wegen (6):

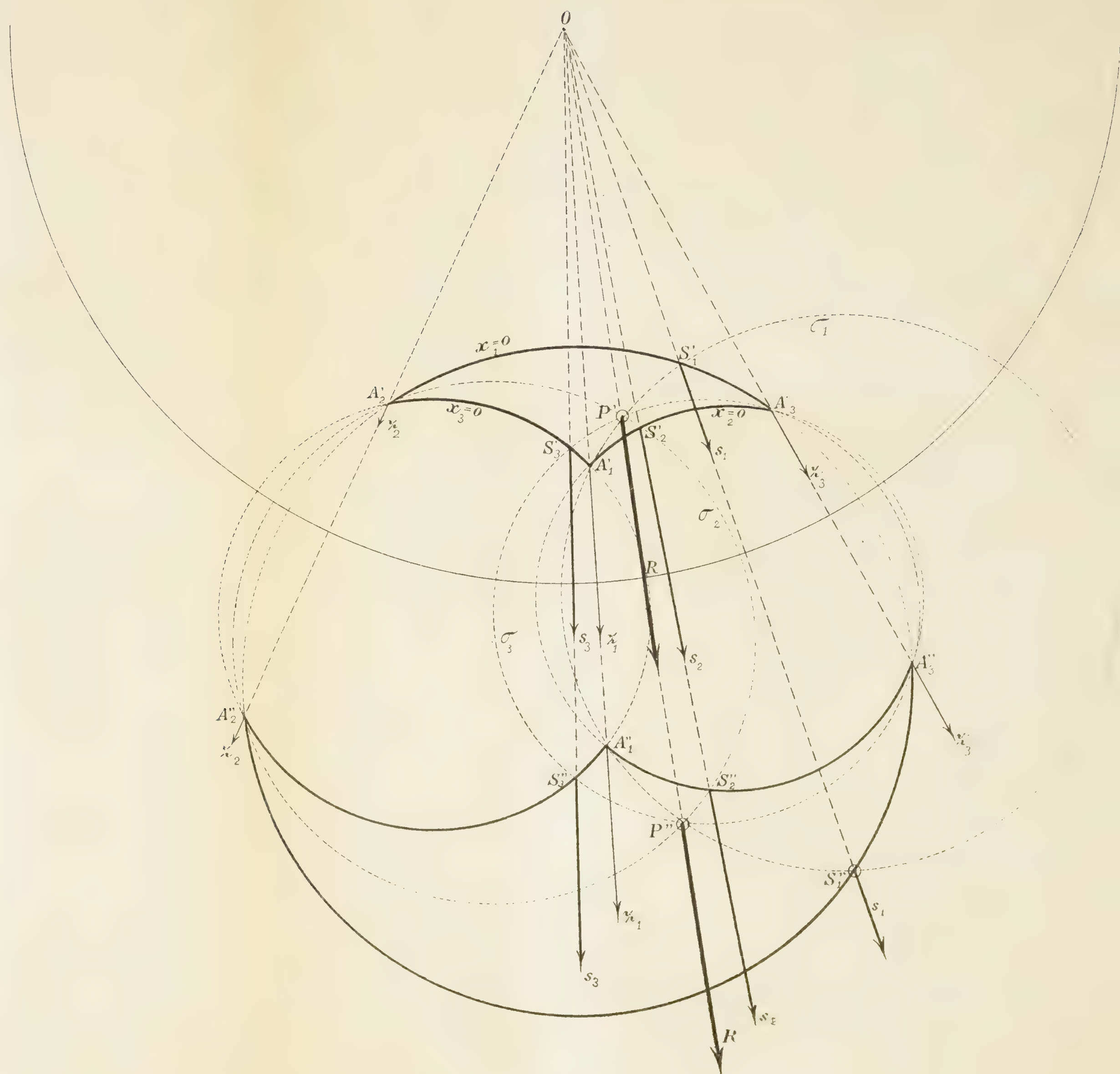
$$x_1 : x_2 = \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 \quad \text{d. h. allgemein:}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4.$$

Damit haben wir folgenden Satz gefunden:

Satz XVIII. *Die Verhältnisse der x_i ändern sich nicht gegenüber einer beliebigen Inversion des Gebüsches, sind also Invariante der Inversion.*

Fig. 1.



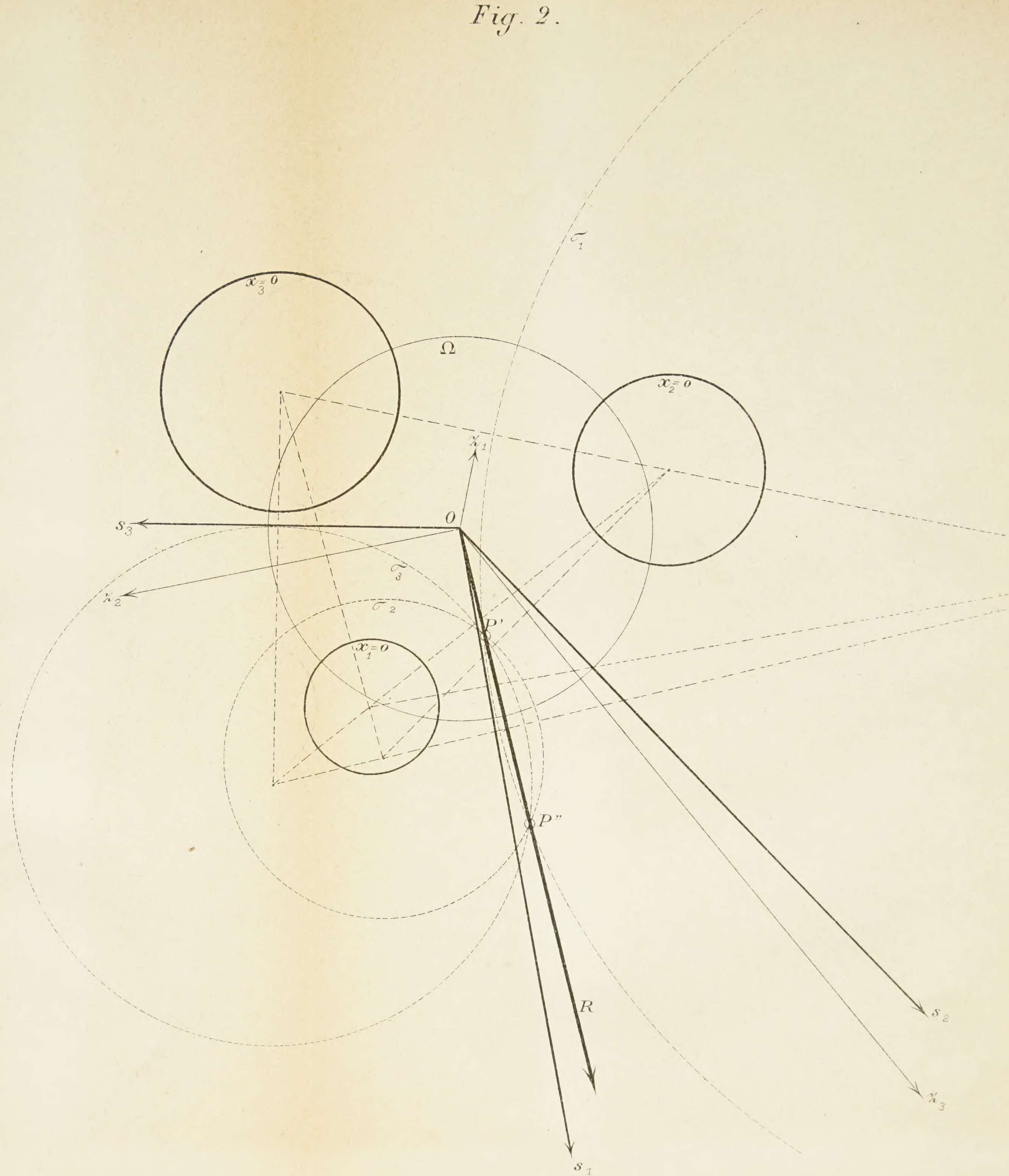


Fig. 2.

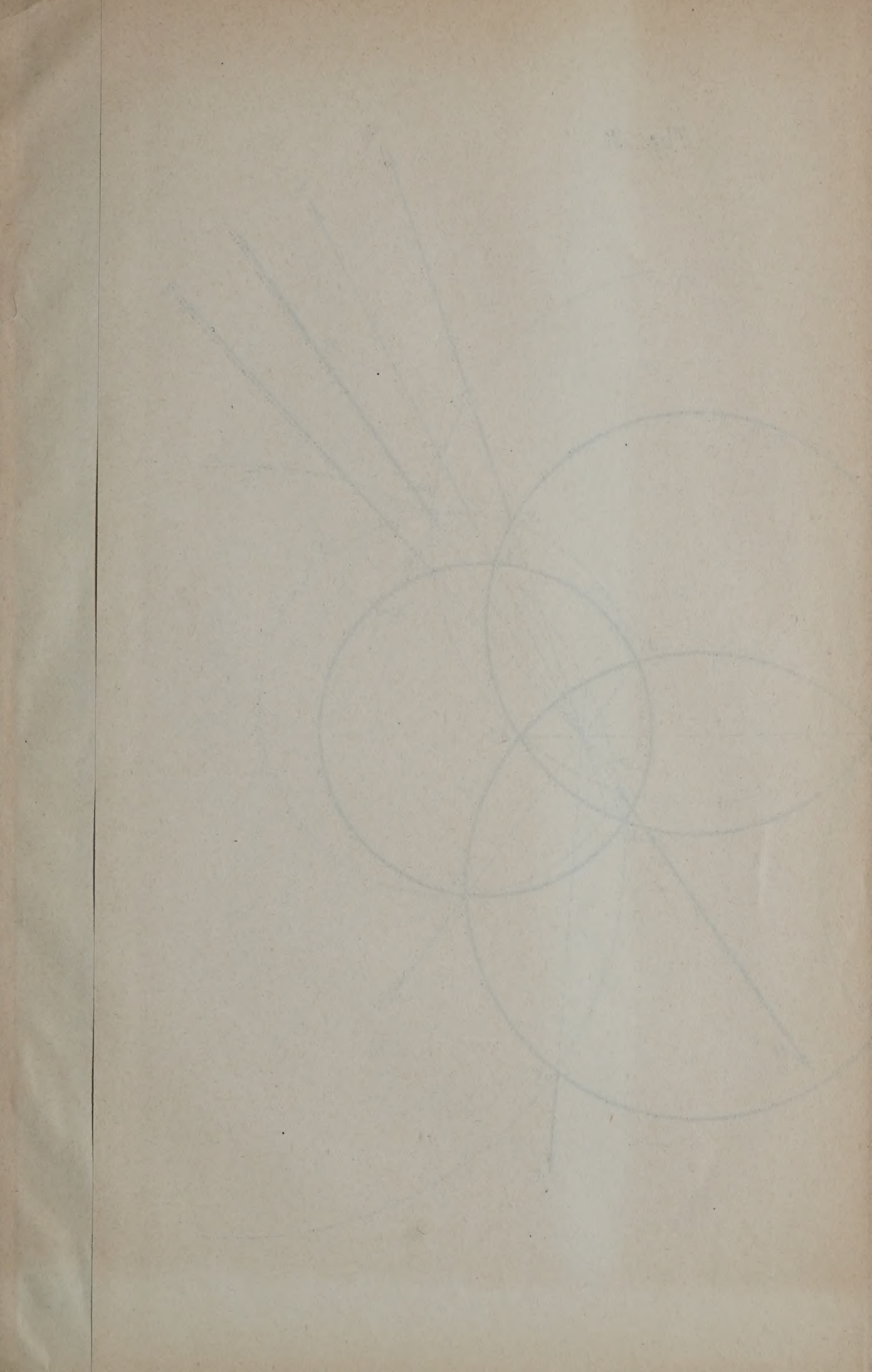


Fig. 3.